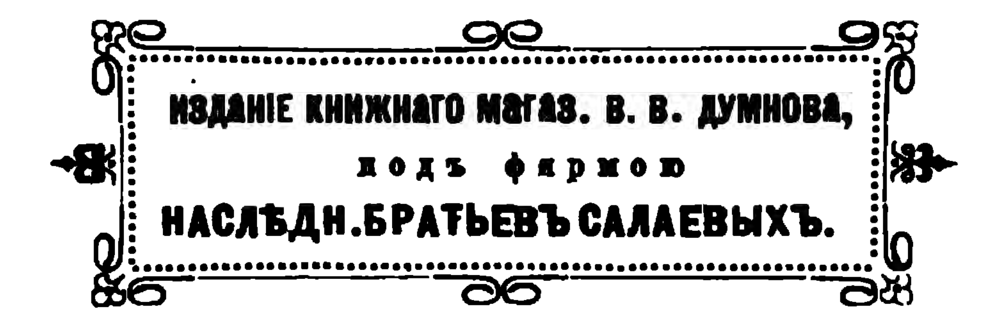
АРИѲМЕТИКА.

составили

А. МАЛИНИНЪ и К. БУРЕНИНЪ.

ИЗДАНІЕ ДЕВЯТНАДЦАТОЕ.

Цѣна 75 коп.



МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Кудринская улица, домъ Кирѣевой.
1897.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Понятіе о числѣ. Изъ окружающихъ насъ предметовъ нѣкоторымъ мы даемъ одно названіе; такъ напр. каждаго изъ мальчиковъ, сидящахъ въ классѣ, мы называемъ *ученикомъ*; растенія, изъ которыхъ состоятъ лѣсъ, называемъ *деревьями*, хотя каждое изъ нихъ можетъ быть не похоже на другое и видомъ, и ростомъ, притомъ одно можетъ быть *береза*, другое *дубъ*, третье *сосна* и пр.; людей, изъ которыхъ состоитъ полкъ, называемъ *солдатами* и т. под. Такіе предметы, которымъ мы можемъ дать одно названіе, наз. *однородными;* а тѣ, которымъ мы можемъ дать только разныя названія, напр. столъ и книга, перо и бумага, человѣкъ и дерево, наз. *разнородными*, Точно также и различныя *явленія*, совершающіяся передъ нами, будутъ *однородными* или *разнородными*, смотря по тому, можемъ ли мы дать имъ одно названіе, или нѣтъ; такъ напр. качанія маятника суть явленія однородныя; біенія пульса суть также явленія однородныя; но качаніе маятника и выстрѣлъ изъ пушки суть уже два разнородныхъ явленія.

Если мы не видимъ другихъ предметовъ, однородныхъ съ тѣмъ, на который обращено наше вниманіе, то мы говоримъ, что такихъ предметовъ только *одинъ*; такъ напр. въ классѣ стоитъ доска, на которой пишутъ мѣломъ, и если другой такой доски нѣтъ, то мы говоримъ, что въ классѣ *одна доска.* Точно также, если совершившееся явленіе не повторяется еще, мы говоримъ, что явленіе совершилось, произошло только *одинъ* разъ; напр., слыша выстрѣлъ изъ пушки и не замѣчая повторенія этого явленія, мы говоримъ, что изъ пушки выстрѣлили *одинъ* разъ.

Если же мы имѣемъ *нѣсколько* однородныхъ предметовъ, напр. нѣсколько книгъ, или если наблюдаемъ нѣсколько однородныхъ явленій, напр. качаній маятника, то съ перваго взгляда мы можемъ сказать только, что книгъ у насъ *не одна*, что маятникъ качнулся *не одинъ разъ*; а чтобы узнать, *сколько именно* у насъ книгъ, *сколько именно* качаній сдѣлалъ маятникъ, мы должны *сосчитать* книги, сосчитать качанія; т. е. въ первомъ случаѣ узнать, сколько *отдѣльныхъ однородныхъ предметовъ* заключается во всей совокуп-

Тысяча милліоновъ составляетъ *билліонъ* (милліардъ), единицу четвертаго класса—билліоновъ. Билліонъ иначе называется *милліардомъ*.

Тысяча билліоновъ составляетъ *трилліонъ*, единицу пятаго класса—трилліоновъ. И такъ далѣе.

Изъ предыдущего видно, что, образуя изъ единицъ трехъ разрядовъ классы, мы употребляемъ новое слово только для названія единицъ каждаго класса; названія же единицъ другихъ двухъ разрядовъ въ каждомъ классѣ составляются изъ словъ *десятокъ* и *сто* и названія единицъ этого класса.

Выгода этого словеснаго счисленія видна достаточно изъ того, что для составленія названій всѣхъ чиселъ до трилліона включительно нужно только пятнадцать различныхъ словъ.

Итакъ словесное счисленіе основано на двухъ слѣдующихъ условіяхъ: *1) десять единицъ каждаго разряда составляютъ единицу слѣдующаго высшаго разряда; 2) совокупность единицъ трехъ разрядовъ составляетъ единицу высшаго класса**).

На основаніи перваго изъ этихъ условій счисленіе это наз. *десятеричнымъ*. Порядокъ, въ которомъ слѣдуютъ другъ за другомъ разряды и классы, показанъ въ слѣдующей таблицѣ:

5-й классъ.	4-й классъ.	3-й классъ. Милліоны.			2-й классъ. Тысячи.			1-й классъ. Единицы.		
Трилліоны.	Билліоны.	9-й разрядъ. Сотни милл.	8-й разрядъ. Десятки милл.	7-й разрядъ. Единицы милл.	6-й разрядъ. Сотни тысячъ.	5-й разрядъ. Десятки тыс.	4-й разрядъ. Единицы тыс.	3-й разрядъ. Сотни.	2-й разрядъ. Десятки.	1-й раз. Простыя единицы.

Всѣ народы имѣютъ десятеричную систему словеснаго счисленія, вѣроятно, потому, что люди вначалѣ считали по пальцамъ. Можетъ быть даже, что дѣленіе пальца на три сустава привело къ составленію каждаго класса изъ трехъ разрядовъ: единицъ, десятковъ и сотенъ.

7. Вопросы. 1) Чѣмъ занимается словесное счисленіе? 2) Почему наше счисленіе назыв. десятеричнымъ? 3) Назвать единицы перваго разряда? второго? третьяго? 4) Сколько единицъ различныхъ разрядовъ заключается въ классѣ? 5) Какъ наз. единицы перваго класса? второго? третьяго? 6) Какой разрядъ составляютъ тысячи? сотни тысячъ? 7) Который классъ составляютъ тысячи? милліоны? трилліоны? 8) Какой разрядъ и классъ составляютъ десятки тысячъ? сотни тысячъ? 9) Назвать единицы второго разряда третьяго класса? 10) Какая раз-

*) Такъ дѣлаютъ во Франціи; въ Германіи же и въ Англіи считаютъ въ каждомъ классѣ единицы не трехъ разрядовъ, а шести, такъ что класса тысячъ такъ нѣтъ, а есть классъ единицъ, милліоновъ, билліоновъ и т. д., а въ каждомъ классѣ—единицы, десятки, сотни, тысячи, десятки тысячъ и сотни тысячъ. Мы принимаемъ французскую систему, какъ болѣе простую.

вида между словами: *единицы и простыя единицы*? 11) Такъ ли много словъ для названій чиселъ, какъ и самыхъ чиселъ? 12) Сколько различныхъ словъ необходимо, чтобы дать названія числамъ отъ единицы до ста? отъ единицы до тысячи? до милліона? билліона? трилліона? 13) Назовите число, состоящее изъ двадцати четырехъ десятковъ? изъ тридцати шести десятковъ и восьми единицъ? изъ сорока трехъ сотенъ и двухъ единицъ? изъ восьми десятковъ тысячъ и трехъ единицъ? изъ двухъ тысячъ сотенъ и семи десятковъ? изъ двухъ единицъ перваго класса и тридцати пяти десятковъ второго класса? изъ трехъ единицъ второго разряда перваго класса и пяти единицъ третьяго разряда третьяго класса?

8. Письменное счисленіе. *Письменное счисленіе есть способъ обозначать всѣ числа посредствомъ немногихъ знаковъ.* Знаки эти наз. *цыфрами*. Всѣхъ цыфръ *десять*; изъ нихъ девять наз. *значащими* и служатъ для обозначенія первыхъ девяти чиселъ. Вотъ эти цыфры: 1 обозначаетъ одну единицу, 2—двѣ, 3—три, 4—четыре, 5—пять, 6—шесть, 7—семь, 8—восемь и 9—девять. Всѣ прочія числа обозначаются посредствомъ этихъ же самыхъ цыфръ съ помощью десятой, которая наз. *нулемъ* и пишется 0.

Чтобы обозначить одинъ, два, три и т. д. десятковъ, ставитъ цыфры 1, 2, 3... и съ правой стороны ихъ нуль, т. е. пишутъ 10, 20, 30 и т. д. Слѣд. *единицы второго разряда*, десятки, обозначаются тѣми же цыфрами, какъ и простыя единицы, поставленными *на второмъ мѣстѣ*, рядомъ съ нулемъ, стоящимъ на первомъ мѣстѣ и показывающимъ, что единицъ перваго разряда въ этихъ числахъ нѣтъ.

Всякое число, состоящее изъ десятковъ и единицъ, обозначается двумя цыфрами, изъ которыхъ цыфра, означающая простыя единицы, ставится на первомъ мѣстѣ, а цыфра, изображающая десятки, на второмъ мѣстѣ отъ правой руки. Такъ число двадцать четыре, состоящее изъ двухъ десятковъ и четырехъ единицъ, пишется 24.

Единицы третьяго разряда, сотни, обозначаются тѣми же цыфрами, только поставленными на третьемъ мѣстѣ отъ правой руки. Такъ, чтобы обозначить одну, двѣ, пять и т. д. сотенъ, пишутъ 100, 200, 500 и проч.

Число, состоящее изъ единицъ, десятковъ и сотенъ, обозначается тремя цыфрами, изъ которыхъ цыфра единицъ ставится на первомъ мѣстѣ, цыфра десятковъ на второмъ, а цыфра сотенъ на третьемъ мѣстѣ отъ правой руки. Такъ число сто восемьдесятъ пять пишется 185.

Число двѣсти шесть пишется 206. Десятковъ въ этомъ числѣ совсѣмъ нѣтъ, а потому мы поставили на мѣстѣ ихъ нуль; еслибы этого не сдѣлали, а написали бы 26, то цыфра 2 стояла бы на второмъ мѣстѣ, слѣд. означала бы не двѣ сотни, а два десятка, и написанныя цыфры изображали бы двадцать шесть.

Чтобы написать одну, двѣ, три... девять тысячъ, поставимъ цыфры 1, 2, 3... 9 и съ правой стороны каждой изъ нихъ три нуля, т. е. напишемъ 1000, 2000, 3000.., 9000.

Припомнивъ, что тысячи составляютъ новый классъ и что онѣ считаются десятками и сотнями, какъ простыя единицы, нетрудно понять, что написать число, состоящее изъ нѣсколькихъ десятковъ и сотенъ *тысячъ*, весьма легко, умѣя писать числа, состоящія изъ десятковъ и сотенъ *простыхъ единицъ*. Такъ, чтобы написать пятнадцать тысячъ, напишемъ 15, и для обозначенія того, что это не 15 единицъ, поставимъ съ правой стороны три нуля, т. е. напишемъ 15 000. Чтобы изобразить двѣсти восемьдесятъ тысячъ, напишемъ 280 и потомъ три нуля, т. е. 280 000.

Въ этихъ примѣрахъ три нуля, стоящіе на концѣ числа, показываютъ, что единицъ трехъ разрядовъ, изъ которыхъ состоитъ классъ единицъ, т. е. сотенъ, десятковъ и единицъ, совсѣмъ нѣтъ въ данныхъ числахъ.

Пусть требуется написать четырнадцать тысячъ семь единицъ. Напишемъ 14, затѣмъ поставимъ два нуля—одинъ на мѣстѣ сотенъ, а другой на мѣстѣ десятковъ, такъ какъ въ данномъ числѣ этихъ разрядовъ совсѣмъ нѣтъ; и наконецъ на мѣстѣ единицъ поставимъ цыфру 7; т. е. напишемъ 14 007. Если бы послѣ 4-хъ не написали нулей, а просто бы написали 147, то класса тысячъ совсѣмъ не оказалось бы, а въ классѣ единицъ были бы всѣ три разряда. Или, еслибы поставили нули послѣ цыфры 7, т. е. написали бы 14 700, то цыфра 7 означала бы не 7 единицъ, а 7 сотенъ, и написанныя цыфры обозначили бы четырнадцать тысячъ семьсотъ.

Чтобы обозначить двѣсти тысячъ тридцать, напишемъ сперва 200; такъ какъ въ данномъ числѣ ни сотенъ, ни единицъ совсѣмъ нѣтъ, а есть только три десятка, то въ классѣ единицъ на мѣстѣ сотенъ поставимъ нуль, на мѣстѣ десятковъ 3 и на мѣстѣ единицъ опять нуль, т. е. напишемъ 200 030.

Положимъ еще, что надо написать двѣсти семь милліоновъ. Такъ какъ милліонъ есть единица третьяго класса, то чтобы написать данное число, надо поставить 207 и послѣ него 6 нулей — три для того, чтобы показать, что въ данномъ числѣ нѣтъ трехъ разрядовъ, составляющихъ классъ тысячъ, и еще три для того, чтобы показать, что нѣтъ единицъ трехъ разрядовъ, составляющихъ классъ единицъ,—т. е. написать 207 000 000. Еслибы нулей совсѣмъ не написали, или написали бы только три нуля, то имѣли бы въ первомъ случаѣ 207 единицъ, а во второмъ 207 000, т. е. 207 тысячъ. Чтобы не ошибиться въ счетѣ нулей, слѣдуетъ отдѣлять одинъ классъ отъ другого небольшими промежутками, какъ показано выше.

Чтобы изобразить двѣнадцать милліоновъ сорокъ восемь единицъ, пишемъ 12; далѣе — такъ какъ въ данномъ числѣ совсѣмъ нѣтъ

класса тысячъ, то ставимъ на мѣстѣ трехъ разрядовъ класса тысячъ три нуля, а въ классѣ единицъ на мѣстѣ сотенъ нуль, на мѣстѣ десятковъ 4 и на мѣстѣ единицъ 8; т. е. пишемъ 12 000 048.

Чтобы написать сто двадцать милліоновъ семьсотъ тысячъ, пишемъ 120, затѣмъ въ классѣ тысячъ 700 и, наконецъ, пишемъ три нуля двя класса единицъ, котораго нѣтъ въ данномъ числѣ, т. е. 120 700 000.

Пятьсотъ восемь милліоновъ триста десять тысячъ сто еорокъ изобразимъ такъ: пишемъ 508, потомъ въ классѣ тысячъ пишемъ 310 и наконецъ пишемъ 140, т. е. 508 310 140.

Итакъ, чтобы *означить цыфрами какое угодно число*, *слѣдуетъ писать классы, начиная съ высшаго, одинъ за другимъ, отдѣляя ихъ другъ отъ друга промежутками*. При этомъ нужно помнить, что въ каждомъ классѣ должны быть единицы трехъ разрядовъ, слѣд. въ каждомъ классѣ должны стоять три цыфры; и потому *если въ классѣ не будетъ единицъ какого-нибудь разряда, то на ихъ мѣстѣ нужно поставить нуль*; *а если совсѣмъ не будетъ какого-нибудь класса, то на его мѣстѣ надо поставить три нуля*. Напр., чтобы написать пятнадцать билліоновъ сто четыре единицы, пишемъ 15, потомъ три нуля на мѣстѣ класса милліоновъ, потомъ еще три нуля для класса тысячъ, и наконецъ 104, т. е. 15 000 000 104.

Сорокъ шесть трилліоновъ двадцать три тысячи триста напишемъ, поставивъ 46, затѣмъ три нуля двя класса билліоновъ, три пуля для класса милліоновъ, въ классѣ тысячъ на мѣстѣ сотенъ 0 потомъ 23, и наконецъ 300, т. е. 46 000 000 023 300.

Итакъ письменное счисленіе основано на двухъ условіяхъ: *1) цыфра, стоящая на первомъ мѣстѣ отъ правой руки, означаетъ единицы, на второмъ—десятки, на третьемъ—сотни, на четвертомъ—тысячи* и т. д.; другими словами, *цыфра, поставленная рядомъ съ другой по лѣвую сторону этой послѣдней, означаетъ единицы слѣдующаго высшаго разряда; 2) цыфра 0 служитъ для замѣщенія единицъ разрядовъ, недостающихъ въ числѣ*.

Число, обозначенное одною цыфрою, напр. 7, 9, наз. *однозначнымъ*; число, обозначенное двумя цыфрами, напр. 30, 50, наз. *двузначнымъ*; числа, обозначенныя больше, чѣмъ двумя цыфрами, напр. 4867,308 425 и т. под., наз. вообще *многозначными*.

9. Выговариваніе чиселъ. Чтобы прочитать число, обозначенное цыфрами, напр. 24870645, замѣтимъ, что первыя три цыфры отъ правой руки означаютъ: первая—единицы, вторая—десятки, третья—сотни перваго класса, т. е. класса единицъ; поэтому мы и отдѣлимъ ихъ занятою, поставленною между цыфрами 6 и 0; три слѣдующихъ цыфры обозначаютъ единицы, десятки и сотни класса тысячъ — ихъ мы также отдѣлимъ занятою; седьмая и восьмая

цыфры означаютъ единицы и десятки милліоновъ; слѣд. написанное число (24,870,645) слѣдуетъ выговорить такъ: двадцать четыре *милліона* восемьсотъ семьдесятъ *тысячъ* шестьсотъ сорокъ пять *единицъ*.

Возьмемъ еще число 50000642035. Три первыхъ цыфры отъ правой руки обозначаютъ единицы, десятки и сотни класса единицъ; отдѣлимъ ихъ запятою. Три слѣдующихъ—единицы трехъ разрядовъ класса тысячъ; отдѣлимъ ихъ также запятою. Три слѣдующихъ, которыя будутъ нули, показываютъ, что въ данномъ числѣ милліоновъ совсѣмъ нѣтъ, и наконецъ двѣ послѣднихъ означаютъ единицы и десятки билліоновъ. Поэтому данное число (50,000,642,035) будетъ пятьдесятъ *билліоновъ* шестьсотъ сорокъ двѣ *тысячи* тридцать пять *единицъ*.

Итакъ *чтобы прочитать число, обозначенное цыфрами, слѣдуетъ раздѣлить его отъ правой руки къ лѣвой на грани по три цыфры въ каждой грани. Въ послѣдней грани къ лѣвой рукѣ могутъ быть двѣ или даже одна цыфра*. Каждая грань будетъ соотвѣтствовать какому-нибудь классу: первая — классу единицъ, вторая — классу тысячъ и т. д. *Потомъ, начиная слѣва, надо читать грани по порядку, прибавляя къ каждой названіе того класса, которому она соотвѣтствуетъ*. Впрочемъ нужно пріучаться читать числа, по крайней мѣрѣ не слишкомъ большія, не раздѣляя ихъ на грани.

10. Вопросы. 1) Чѣмъ занимается письменное счисленіе? 2) Какая разница между цыфрою и числомъ? 3) Сколько мы употребляемъ цыфръ для обозначенія чиселъ? 4) Для чего служитъ цыфра нуль? 5) Какимъ образомъ посредствомъ десяти цыфръ мы изображаемъ всѣ числа? На какомъ мѣстѣ стоятъ десятки тысячъ? милліоны? 7) Написать число, состоящее изъ 23 десятковъ и 3 единицъ? изъ 15 сотенъ? изъ 35 десятковъ втораго класса? 8) Написать число, состоящее изъ трехъ единицъ третьяго класса, четырнадцати десятковъ второго класса и семисотъ единицъ перваго? 9) Написать число, состоящее изъ четырехсотъ единицъ второго класса? 10) Какъ пишется всякое многозначное число? 11) Какъ прочитать число, обозначенное цыфрами? 12) Какое будетъ самое меньшее изъ четырехзначныхъ чиселъ? самое большое пятизначное?

11. Различныя системы счисленія. Вмѣсто того, чтобы употреблять десять цыфръ для обозначенія чиселъ и допускать, что значеніе каждой цыфры при перемѣнѣ мѣста увеличивается въ десять разъ, можно взять только двѣ, три, четыре и т. д. цыфры и сообразно числу цыфръ допустить, что значеніе каждой цыфры увеличивается въ 2, 3, 4 и т. д. разъ. По числу употребляемыхъ цыфръ система наз. *двоичной*, *троичной*, *четверичной*, *пятеричной* и т. д., а самое число цыфръ наз. *основаніемъ* системы. Слѣд. цыфры двоичной системы будутъ 1 и 0, троичной 1, 2 и 0, четверичной—1, 2, 3 и 0; девятеричной—1, 2, 3.....8 и 0. Если основаніе системы будетъ больше десяти,

напр. двѣнадцать, то десяти знаковъ будетъ уже недостаточно, и нужно прибавить еще два новыхъ знака для обозначенія чиселъ десяти и одиннадцати.

Какова бы ни была система, по ней можно выразить всѣ числа. Возьмемъ напр. пятеричную систему, т. е. положимъ, что имѣемъ только пять цыфръ 1, 2, 3, 4 и 0, и сдѣлаемъ условіе, что на первомъ мѣстѣ съ правой руки стоятъ единицы, на второмъ пятки, на третьемъ двадцать пять, потомъ сто двадцать пять и т. д., вообще — что каждый разрядъ въ пять разъ больше предыдущаго разряда. Тогда числа одинъ, два, три, четыре изобразятся 1, 2, 3, 4; число пять надо будетъ изобразить такъ: 10. Слѣдующее число *шесть*, состоящее изъ одного пятка и одной единицы, должно изобразить 11; *семь*, состоящее изъ пятка и двухъ единицъ, должно изобразить 12 и т. д. до числа *девять*, которое надо изобразить 14.

Число *десять*, состоящее изъ двухъ пятковъ, т. е. двухъ единицъ 2-го разряда, слѣдуетъ обозначить такъ: 20; одиннадцать черезъ 21; двѣнадцать черезъ 22....; пятнадцать, состоящее изъ трехъ пятковъ, надо изобразить 30 и т. д. до числа *двадцать четыре*, которое, состоя изъ четырехъ пятковъ и четырехъ единицъ, должно быть изображено 44. Слѣдующее число *двадцать пять*, состоящее изъ пяти пятковъ, слѣд. въ пять разъ большее единицы 2-го разряда — пятка, нужно обозначить цыфрою 1, поставленною на третьемъ мѣстѣ, т. е. 100, и т. д.

Положимъ, что число 2783, написанное по десятеричной системѣ, надо выразить по пятеричной. Узнаемъ, сколько въ немъ заключается пятковъ—для этого 2783 раздѣлимъ на 5; получимъ 556 пятковъ и 3 единицы; 3 и будетъ первая справа цыфра искомаго числа пятеричной системы. Раздѣливъ 556 на 5, узнаемъ, что въ 556 пяткахъ содержатся 111 единицъ третьяго разряда и еще 1 пятокъ; слѣд. 1 будетъ второй цыфрой числа. Дѣля 111 на 5, узнаемъ, что въ числѣ содержится 22 единицы четвертаго разряда и остается еще 1 единица третьяго разряда; слѣд. 1 есть третья цыфра искомаго числа, считая справа. Раздѣливъ 22 на 5, найдемъ, что въ числѣ содержатся 4 единицы пятаго и 2 единицы четвертаго разряда; слѣд. 2 будетъ четвертая, а 4—пятая цыфра. Единицъ шестого разряда въ числѣ нѣтъ, ибо 4 единицы пятаго разряда не составляютъ ни одной единицы шестого.

Такимъ образомъ число 2783 содержитъ (по пятеричной системѣ) 4 единицы пятаго разряда, 2 един. 4-го, 1 третьяго, 1 второго, 3 перваго разр.; поэтому его надо обозначить такъ: 42113.

Чтобы выразить то же число 2783 по двоичной системѣ, имѣющей только двѣ цыфры 1 и 0, замѣтимъ, что по этой системѣ на первомъ мѣстѣ справа должны стоять единицы, на второмъ двойки, на третьемъ четверки, на четвертомъ восьмерки..., вообще, что единица каждаго разряда вдвое болѣе единицы предыдущаго разряда; поэтому, чтобы найти первую цыфру, надо взять остатокъ отъ дѣленія даннаго числа на 2; чтобы найти вторую цыфру, надо полученное частное снова раздѣлить на 2 и взять остатокъ т. е. до тѣхъ поръ пока не получимъ въ частномъ число, меньшее 2, т. е. 1. Взявъ тогда

послѣднее частное и всѣ остатки отъ послѣдняго до перваго, найдемъ всѣ цыфры искомаго числа. Получимъ 1010110111111.

Напишемъ еще число 2783 по двѣнадцатеричной системѣ, цыфры которой суть 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 и еще напр. *a*—цыфра, означающая число десять, и *b*, означ. число одиннадцать. По этой системѣ на первомъ мѣстѣ справа стоятъ единицы, на второмъ дюжины, на третьемъ гроссы (144), на четвертомъ 1728...., вообще, единица каждаго разряда въ 12 разъ больше единицы предыдущаго разряда; поэтому, дѣля 2783 на 12, полученное частное опять на 12 и т. д., найдемъ, что 2783 по двѣнадцатеричной системѣ изобразится 173*b*.

Положимъ, что число 11054, написанное по семеричной системѣ, надо выразить по десятеричной. Такъ какъ по семеричной системѣ единица второго разряда = 7 един. перваго, единица 3 го разр. = 7 един. второго и слѣд. 49 един. перваго, един. 4-го=7 един. 3-го и слѣд. 343 един. перваго и т. д., то число 11054=4+5.7+0. 49+ +1.343+1.2401=4+35+0+343+2401=2783.

Подобнымъ образомъ найдемъ, что число 1101000111110, написанное по двоичной системѣ, выражаетъ по десятеричной число 6718.

Если требуется число, выраженное по какой-нибудь системѣ не десятеричной, изобразить по другой системѣ, также не десятеричной, то надо сперва выразить его по десятеричной системѣ и потомъ уже полученное число написать по той системѣ, по которой требуется.

12. Римская и славянская системы счисленія. Цыфры, употребляемыя нами для обозначенія чиселъ, наз. *арабскими*, потому что они заимствованы Европейскими народами у Аравитянъ, какъ полагаютъ, въ половинѣ десятаго столѣтія. Европейскіе образованные народы древности, Греки и Римляне, употребляли для изображенія чиселъ буквы своего алфавита. Греческая система перешла и къ нашимъ предкамъ, у которыхъ она была до времени Петра Великаго во всеобщемъ употребленіи, а въ настоящее время осталась только въ церковныхъ книгахъ.

По римской системѣ особыми знаками изображаются слѣдующія числа: 1 — знакомъ I, 5 — V, 10 — X, 50 — L, 100 — C, 500—D, 1000—M; а для изображенія прочихъ чиселъ принято условіе, что всякій меньшій знакъ, поставленный съ правой стороны другого, большаго, увеличиваетъ его значеніе, а будучи поставленъ съ лѣвой стороны, уменьшаетъ его значеніе на столько единицъ, сколько онъ самъ обозначаетъ.

Такъ напр. II, III изображаютъ числа 2, 3; IV — 4; VI — 6; VII, VIII—7 и 8; IX—9; XI, XII, XIII,—11, 12, 13; XIV—14; XX—20, XXXVI—36, XL—40, LX—60, XC—90, CX—110, CL—150, CD—400, DC—600, CM—900, MC—1100.

Для изображенія чиселъ, меньшихъ двухъ тысячъ, знаки, изображающіе единицы различныхъ разрядовъ этихъ чиселъ, пишутся отъ лѣвой руки къ правой въ томъ порядкѣ, въ какомъ они произносятся; напр. число 1895 слѣдуетъ писать такъ: MDCCCXCV.

Числа, состоящія изъ нѣсколькихъ тысячъ, пишутся точно также, какъ числа, состоящія изъ нѣсколькихъ единицъ; только съ

вой стороны написаннаго числа внизу ставится буква *m* (mille--тысяча); такъ напр. 3000 пишется III_m, 40000 — XL_m, 100 тысячъ—C_m, милліонъ—M_m; 843604—$DCCCXLIII_m$ DCIV; 406990—$CDVI_m$CMXC и т. под.

Въ славянскомъ счисленіи каждая изъ единицъ трехъ первыхъ разрядовъ, т. е. единицъ, десятковъ и сотенъ, изображается особой буквою славянской азбуки, при чемъ буква ставится подъ *титломъ*. Вотъ знаки чиселъ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃	і҃
20	30	40	50	60	70	80	90	100	200
к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	ѻ҃	п҃	ч҃	р҃	с҃
	300	400	500	600	700	800	900		
	т҃	ѵ҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѿ҃	ц҃		

Числа, меньшія тысячи, но состоящія изъ единицъ нѣсколькихъ разрядовъ, изображаются этими же буквами, поставленными отъ лѣвой руки въ правой въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ произносятся. Такъ 21 пишется к҃а; 48—м҃и; 195—р҃че.

Для изображенія чиселъ, состоящихъ изъ нѣсколькихъ тысячъ, служитъ тѣ же самыя буквы съ прибавленіемъ передъ ними знака ҂. Такъ 1000 пишется ҂а, 80000—҂п.

Число 25275 пишется такъ: ҂в҃е҂с҃ое.

ГЛАВА II.

ДѢЙСТВІЯ СЪ ЦѢЛЫМИ ЧИСЛАМИ.

13. Ученикъ заплатилъ за книгу 35 коп. и у него осталось 55 коп.; сколько у него было денегъ до покупки книги?

Чтобы отвѣтить на етотъ вопросъ, *надо изъ двухъ данныхъ чиселъ* — одного, показывающего, сколько было истрачено денегъ, и другого, показывающаго, сколько осталось ихъ, *составить новое число*, показывающее, сколько было всѣхъ денегъ.

Положимъ еще, что данъ вопросъ такого рода: изъ 15 листовъ бумаги сдѣланы днѣ тетради; на одну пошло 6 листовъ; сколько листовъ пошло на другую?

И въ этомъ случаѣ *изъ двухъ данныхъ чиселъ*—одного, показывающаго, сколько было всей бумаги, и другого, показывающаго,

сколько было употреблено листовъ на одну тетрадь, *надо составить новое число*, показывающее, сколько осталось листовъ для другой тетради.

Вообще, *при рѣшеніи различныхъ практическихъ вопросовъ приходится изъ двухъ или нѣсколькихъ данныхъ чиселъ составлять новыя*. Этого достигаютъ, производя надъ данными числами различныя *дѣйствія*. Изъ дѣйствій четыре наз. *главными* или *основными*, потому что они служитъ основаніемъ всѣхъ другихъ дѣйствій. Эти основныя дѣйствія суть *сложеніе*, *вычитаніе*, *умноженіе и дѣленіе*.

СЛОЖЕНІЕ.

14. Въ одной ворзинѣ 56 яблокъ, въ другой 40, въ третьей 32 яблока; сколько яблокъ во всѣхъ корзинахъ вмѣстѣ?

Для рѣшенія этого вопроса надо изъ трехъ данныхъ чиселъ, показывающихъ, сколько яблокъ лежитъ въ каждой корзинѣ, составить новое число, показывающее, сколько яблокъ во всѣхъ трехъ корзинахъ. Число это можно было бы найти однимъ счетомъ: именно, къ числу яблокъ, лежащихъ въ первой корзинѣ, слѣдовало бы присчитать по одному всѣ яблоки, которыя лежатъ во второй, и потомъ къ полученному числу присчитать по одному всѣ яблоки, лежащія въ третьей. Каждое яблоко при этомъ счетѣ было бы единицею, и полученное число содержало бы столько единицъ, сколько ихъ во всѣхъ данныхъ числахъ 56, 40 и 32 вмѣстѣ. Но гораздо скорѣе можно составить это новое число, произведя надъ данными числами дѣйствіе, которое наз. *сложеніемъ*. Слѣд. *сложеніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ составляется новое число, содержащее столько единицъ, сколько заключается ихъ во всѣхъ данныхъ числахъ*. Числа, которыя нужно сложить, наз. *слагаемыми*; а число, которое получается, наз. *суммою*. Для обозначенія этого дѣйствія, ставится между слагаемыми знакъ $+$, наз. *плюсъ*. Сумму ставятъ послѣ послѣдняго слагаемаго отдѣливъ отъ него знакомъ $=$, который наз. *знакомъ равенства*. Напр. чтобы обозначить, что 5 надо сложить съ 9, пишутъ $5+9$; или, если будетъ написано $1+1=2$, то это значитъ, что единица сложенная съ единицею, даетъ въ суммѣ два.

15. Сложеніе однозначныхъ чиселъ. Пусть дано сложить числа 5, 3, 2 и 6. Для этого прибавляемъ къ числу 5 по одной всѣ единицы, изъ которыхъ состоитъ второе число, говоря: 5 да 1 будетъ шесть; 6 да 1—семь, 7 да 1—восемь; къ полученной суммѣ 8 прибавляемъ точно такимъ же образомъ всѣ единицы третьяго числа 2 и получимъ 10; наконецъ, прибавляя къ полученной суммѣ 10 по одной всѣ единицы четвертаго числа 6, получимъ общую сумму 16. Итакъ $5+3+2+6=16$.

Надо пріучиться складывать однозначныя числа сразу, говори прямо 5 да 3 восемь, 8 да 2—десять, 10 да 6—шестнадцать.

Мы складывали данныя числа отъ перваго къ послѣднему; но очевидно, если бы мы стали складывать ихъ наоборотъ отъ послѣдняго къ первому, или начали бы съ какого-нибудь средняго слагаемаго, лишь бы только взяли всѣ слагаемыя, та сумма, содержа въ себѣ всѣ единицы, изъ которыхъ состояли слагаемыя, была бы одна и та же. Поэтому отъ *перемѣны порядка слагаемыхъ сумма не измѣняется.*

16. Сложеніе многозначныхъ чиселъ. Пусть дано сложить числа 867, 345 и 537. Придавать къ числу 867 по одной всѣ 345 единицъ, изъ которыхъ состоитъ второе число, потомъ къ полученной суммѣ придавать всѣ единицы, изъ которыхъ состоитъ число 537, было бы и долго, и утомительно. Легче сдѣлать сложеніе такъ: единицы всѣхъ данныхъ чиселъ сложить между собою, десятки между собою, сотни между собою; при этомъ придется складывать только однозначныя числа; а сумма, содержа всѣ единицы, всѣ десятки, всѣ сотни данныхъ чиселъ, будетъ состоять изъ столькихъ простыхъ единицъ, сколько ихъ есть во всѣхъ слагаемыхъ вмѣстѣ. Чтобы не сложить единицъ различныхъ разрядовъ, мы подпишемъ числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями.

$$\begin{array}{r} 867 \\ +345 \\ 537 \\ \hline 1749 \end{array}$$

Подъ послѣднимъ слагаемымъ проведемъ черту и будемъ складывать цыфры перваго столбца справа: 7 да 5 будетъ 12, 12 да 7 составляетъ 19 единицъ, т. е. одинъ десятокъ и 9 единицъ. Цыфру 9 напишемъ подъ столбцомъ единицъ; а 1 десятокъ, какъ говорятъ, оставимъ на время въ *умѣ* и приложимъ его потомъ къ суммѣ десятковъ.

Наконецъ складываемъ десятки: 6 да 4=10, 10 да 3=13, да 1 десятокъ, удержанный въ умѣ,=14 десятковъ, т. е. 1 сотня и 4 десятка. Подписываемъ 4 подъ столбцомъ десятковъ, а 1 сотню удерживаемъ въ умѣ.

Потомъ складываемъ сотни: 8 да 3=11, 11 да 5=16; 16 да 1 сотня, удержанная въ умѣ,=17 сотенъ. Это число подписываемъ подъ столбцомъ сотенъ сполна, потому что единицъ слѣдующаго разряда въ слагаемыхъ нѣтъ. Сумма будетъ 1749.

Мы начали складывать числа съ правой руки; попробуемъ теперь начать съ лѣвой. Сложивши числа въ первомъ столбцѣ слѣва, мы получимъ 16; это число и надо бы написать подъ первымъ столбцомъ; но сложивъ десятки, получимъ 13 десятковъ, т. е. 3 десятка и 1 сотню; эту сотню нужно придать къ прежде полученнымъ 16

сотиямъ; слѣд. цыфру 6, уже написанную нами, придется зачеркнуть и поставить вмѣсто нея 7. Точно также, сложивъ единицы, увидимъ, что и цыфру 3, написанную подъ десятками, надо перемѣнить на 4, такъ какъ отъ сложенія единицъ получится число 19, состоящее изъ 9 единицъ и 1 десятка, который и надо придать къ прежде полученнымъ 3 десяткамъ. Такимъ образомъ сложеніе начинаютъ съ правой руки только затѣмъ, чтобы легче было придать цыфру, удержанную въ умѣ, къ суммѣ цыфръ слѣдующаго влѣво столбца; иначе подъ каждымъ столбцомъ приходилось бы перемѣнять цыфру, написанную прежде, чѣмъ сложены были цыфры слѣдующаго вправо столбца.

Когда сумма цыфръ каждаго столбца не превышаетъ 9, то совершенно все равно, откуда начать сложеніе—съ правой ли руки, или съ лѣвой, или наконецъ, съ какого угодно средняго столбца.

Итакъ, *при сложеніи многозначныхъ чиселъ, слагаемыя подписываютъ одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного разряда стояли въ одномъ столбцѣ* (т. е. единицы подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д.); *подъ послѣднимъ слагаемымъ проводятъ черту и сумму пишутъ подъ нею. Сложеніе начинаютъ отъ правой руки, т. е. сперва складываютъ цыфры перваго столбца, или простыя единицы; если сумма ихъ не больше 9, то подъ столбцомъ единицъ подписываютъ только цыфру единицъ этой суммы, а цыфру десятковъ прикладываютъ къ суммѣ цыфръ слѣдующаго столбца, т. е. десятковъ. Такъ же точно складываютъ столбецъ десятковъ и слѣдующіе за нимъ столбцы до послѣдняго, подъ которымъ пишутъ сполна всю сумму его цыфръ. Полученное число, написанное подъ чертою, и будетъ сумма.*

Примѣры: 1) 3067+5789+23+205+70+1028=10182.

2) 378+2069+680+3009=6136.

3) 502+618+39+8+1275=2442.

17. Если дано сложить много чиселъ, то можно сложить сперва нѣсколько изъ нихъ, потомъ нѣсколько другихъ, наконецъ остальным и затѣмъ сложить всѣ полученныя суммы.

Напр. 508+1017+32+48+206+1009+306+5103+709+ +918+70+5+1230+4+1037+2938+75+6.

Здѣсь дано сложить 18 чиселъ; сложивъ шесть первыхъ, потомъ шесть вторыхъ и шесть третьихъ, получимъ три суммы 2820, 7411 и 5290. Сложивъ эти суммы, получимъ 15521.

18. Повѣрка сложенія. Складывая числа, можно иногда ошибиться, особенно если слагаемыхъ много; тогда полученная сумма будетъ невѣрна. Напр.; еслибы нужно было сложить 378+506+419, и кто-нибудь, складывая разрядъ единицъ, сказалъ бы 9 да 6 тринадцать, да 8=20, и затѣмъ складывалъ бы вѣрно, то онъ получилъ бы въ суммѣ 1300; это число невѣрно, потому что 9 да 6 не

13, а 15, и истинная сумма есть 1303, а не 1300. Можно также ошибиться и при другихъ дѣйствіяхъ, которыя производятся съ числами; поэтому нужно найти способы, по которымъ бы можно было узнать, вѣрно ли сдѣлано дѣйствіе или нѣтъ; иначе говоря, нужно умѣть *повѣрить дѣйствіе. Чтобы повѣрить сложеніе, нужно переслoжить числа вновь, измѣнивши только порядокъ, въ которомъ складывали цыфры каждаго столбца;* т. е. если прежде складывали сверху внизъ, то должно складывать снизу вверхъ—и обратно; *или можно сложить данныя числа, написавъ ихъ въ другомъ порядкѣ, чѣмъ они были написаны прежде; также можно отчеркнуть одно слагаемое, а остальныя сложить и къ суммѣ ихъ придать отчеркнутое слагаемое; если въ результатѣ получится то же число, какое получили и до повѣрки, то можно заключить, что сложеніе сдѣлано вѣрно.* Напр., если хотимъ повѣрить 789+508+617+2348=4382, то сложимъ только 789+508+617; получимъ 1914; сложивши 1914 съ послѣднимъ слагаемымъ 2348, находимъ въ суммѣ 4262; такъ какъ въ первомъ случаѣ получилась сумма 4382, а во второмъ 4262; то слѣд. мы или въ первый разъ сложеніе сдѣлали невѣрно, или при самой повѣркѣ ошиблись. Пересложивши данныя числа во второй разъ, видимъ, что мы ошиблись прежде, и что сумма=4262.

19. *Всякій вопросъ, въ которомъ требуется найти одно или нѣсколько неизвѣстныхъ чиселъ посредствомъ различныхъ дѣйствій съ данными числами, наз. задачею. Рѣшить задачу—значитъ опредѣлить неизвѣстныя числа, произведя дѣйствія надъ данными числами.*

20. *Сложеніе употребляется при рѣшеніи такихъ задачъ, въ которыхъ требуется найти число, равное нѣсколькимъ даннымъ числамъ, вмѣстѣ взятымъ;* или *когда одно число приходится увеличить столькими единицами, сколько ихъ есть въ другомъ.* Напр.

1) Въ училищѣ 4 класса: въ первомъ 29 учениковъ, во второмъ 35, въ третьемъ 31, въ четвертомъ 17. Сколько всего учениковъ въ училищѣ?

Для рѣшенія вопроса надо изъ 4 данныхъ чиселъ 29, 35, 31 и 17 составить одно, равное имъ всѣмъ, вмѣстѣ взятымъ, слѣд. надо сложить ихъ; 29+35+31+17=112, поэтому въ училищѣ 112 учениковъ.

2) За сколько надо продать товаръ, стоящій 650 руб., чтобы получить прибыли 84 руб.?

Товаръ надо продать дороже того, что онъ стоитъ, на столько руб., сколько мы желаемъ получить прибыли; слѣд. число 650 надо увеличить 84-мя единицами, т. е. сложить 650 и 84. Итакъ, товаръ надо продать за 650+84=734 рубля.

Замѣтимъ, что при рѣшеніи этихъ задачъ мы складывали данныя числа, какъ будто бы они были отвлеченныя, и только въ суммѣ

поставивъ названіе той единицы, о которой шло дѣло; именно въ первой задачѣ 112 *учениковъ*, а во второй 734 *рубля*.

21. Вопросы. 1) Что наз. сложеніемъ? 2) Какъ наз. числа, данныя для сложенія, и число, которое получается отъ этого дѣйствія? 3) Какъ наз. знакъ сложенія? какъ онъ пишется? гдѣ ставится? 4) Какъ дѣлается сложеніе однозначныхъ чиселъ? 5) Какъ дѣлается сложеніе многозначныхъ чиселъ? 6) Зачѣмъ слагаемыя подписываются одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного и того же разряда находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ? 7) Можно ли складывать числа, не подписывая ихъ одно подъ другимъ? 8) Почему сложеніе начинается съ правой руки? 9) Въ какомъ случаѣ все равно, откуда ни начать сложеніе? 10) Какъ дѣлается сложеніе въ тѣхъ случаяхъ, когда слагаемыхъ очень много? 11) Что значитъ повѣрить дѣйствіе? 12) Какъ повѣрить сложеніе? 13) Что наз. задачею? 14) Какія задачи рѣшаются посредствомъ сложенія? 15) Какъ увеличить данное число нѣсколькими единицами? 16) Увеличить 7 пятью? 8 двадцатью девятью? 17) Составить нѣсколько задачъ на сложеніе?

ВЫЧИТАНІЕ.

22. Изъ 27 листовъ бумаги взято 15 листовъ; сколько осталось? Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, слѣдовало бы изъ 27 листовъ брать по одному всѣ 15 листовъ, которые нужно отнять, и пересчитать потомъ оставшіеся листы. Каждый листъ при этомъ счетѣ былъ бы единицею, и мы не досчитали бы изъ 27 столькихъ единицъ, сколько ихъ было въ другомъ числѣ 15. При рѣшеніи этой задачи, мы изъ двухъ данныхъ чиселъ (27 и 15) посредствомъ простого счета составили бы новое число, отнявъ отъ бо́льшаго числа столько единицъ, сколько ихъ находится въ меньшемъ; но гораздо скорѣе можно найти это число, произведя надъ данными числами дѣйствіе, наз. *вычитаніемъ*. Слѣд. *вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ двухъ данныхъ чиселъ мы составляемъ третье, отнимая отъ бо́льшаго столько единицъ, сколько ихъ содержится въ меньшемъ.*

Числа, данныя для вычитанія, имѣютъ особыя названія: то, отъ котораго отнимаютъ, наз. *уменьшаемымъ*; а то, которое отнимаютъ, наз. *вычитаемымъ*; число же, которое получается, наз. *остаткомъ* или *разностью*. Чтобы показать, что одно число надо вычесть изъ другого, пишутъ уменьшаемое, потомъ ставятъ знакъ вычитанія —, наз. *минусъ*, за нимъ пишутъ вычитаемое; напр. для обозначенія того, что изъ 27 надо вычесть 15, пишутъ 27—15.

23. Вычитаніе однозначнаго числа изъ однозначнаго. Чтобы вычесть напр. 5 изъ 8, надо отъ 8 отнимать послѣдовательно по одной всѣ единицы, изъ которыхъ состоитъ 5, говоря: 1 изъ 8-ми будетъ 7, 1 изъ 7-и шесть, 1 изъ 6-ти пять, 1 изъ 5-ти четыре, 1 изъ 4-хъ три; 3 и будетъ разность, такъ что 8—5=3.

Для ускоренія хода дѣйствія, слѣдуетъ пріучиться вычитать однозначныя числа сразу, прямо говоря 5 изъ 8-ми—три, 4 изъ 9-и пять, 2 изъ 8-и шесть, 2 изъ 4-хъ два и т. под.

24. Вычитаніе однозначнаго числа изъ двузначнаго. Пусть надо вычесть 6 изъ 23. По предыдущему слѣдуетъ отнимать отъ 23 послѣдовательно всѣ 6 единицъ, изъ которыхъ состоятъ меньшее число, говоря: 1 изъ 23 будетъ 22; 1 изъ 22-хъ 21, 1 изъ 21-го 20, 1 изъ 20-ти 19, 1 изъ 19-ти 18, 1 изъ 18-ти 17. Послѣднее число и будетъ разность. И въ этомъ случаѣ, какъ въ предыдущемъ надо пріучиться дѣлать вычитаніе сразу; такъ слѣдуетъ прямо говорить: 8 изъ 13-ти пять, 7 изъ 16-ти девять, 5 изъ 24-хъ девятнадцать, 9 изъ 83-хъ семьдесятъ четыре и т. под.

25. Вычитаніе многозначныхъ чиселъ. Пусть дано вычесть 2535 изъ 7839. Отнимать отъ бо́льшаго числа по одной всѣ 2535 единицъ, изъ которыхъ состоитъ меньшее число, было бы очень долго и утомительно; поэтому мы сдѣлаемъ слѣдующее сокращеніе. Подпишемъ вычитаемое число подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы находились подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д. Подъ вычитаемымъ проведемъ черту. Потомъ будемъ вычитать

$$\begin{array}{r} 7839 \\ -2535 \\ \hline 5304 \end{array}$$

единицы изъ единицъ, десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ и т. д. Вычитать при этомъ придется только однозначныя числа, что мы уже умѣемъ дѣлать; а между тѣмъ, отнявши единицы, десятки, сотни и т. д., изъ которыхъ состоитъ второе число, мы отнимемъ всѣ единицы, изъ которыхъ оно состоитъ, отъ бо́льшаго числа. Итакъ, начиная съ единицъ, говоримъ: 5 единицъ изъ 9-и даютъ 4 единицы, которыя и пишемъ подъ столбцомъ единицъ.

Отнимая 3 десятка отъ 3-хъ десятковъ, въ остаткѣ не получимъ ничего; поэтому подъ столбцомъ десятковъ ставимъ 0.

Вычитая 5 сотенъ изъ 8 сотенъ, получимъ 3 сотни, которыя и пишемъ подъ столбцомъ сотенъ.

Наконецъ, вычитая 2 тысячи изъ 7 тысячъ, получимъ 5 тысячъ, которыя пишемъ подъ столбцомъ тысячъ. Полученное число 5304 и будетъ искомая разность, такъ что 7839—2535=5304.

Возьмемъ другой примѣръ. Пусть надо вычесть 5496 изъ 12053.

$$\begin{array}{r} \dot{}\,\dot{}\,\dot{}\,\dot{}\;\; \\ 12053 \\ -5496 \\ \hline 6557 \end{array}$$

Здѣсь представляется затрудненіе: нельзя 6 единицъ вычесть изъ 3-хъ единицъ. Чтобы сдѣлать вычитаніе возможнымъ, занимаемъ у 5-и десятковъ одинъ и вмѣсто него придаемъ 10 единицъ къ тѣмъ

3-мъ, изъ которыхъ надо было вычесть. Теперь 6 единицъ можно вычесть изъ 13-и; разность 7 пишемъ подъ столбцомъ единицъ; а чтобы не забыть, что у пяти десятковъ занятъ одинъ, надъ цыфрою 5 ставимъ точку.

Теперь приходится вычитать 9 десятковъ изъ 4-хъ десятковъ, что опять невозможно; слѣдовало бы у сотенъ занять одну; но сотенъ въ уменьшаемомъ совсѣмъ нѣтъ, ибо на мѣстѣ сотенъ стоитъ 0; поэтому мы занимаемъ у первой, слѣдующей за нулемъ, значащей цыфры 2 одну единицу, т. е. одну тысячу, и вмѣсто нея придаемъ 9 сотенъ къ нулю, а вмѣсто остальной, десятой, сотни придаемъ 10 десятковъ къ тѣмъ 4-мъ, изъ которыхъ нельзя было вычесть 9 дес.; надъ цыфрою тысячъ 2 ставимъ точку; 9 десятковъ теперь нужно будетъ уже вычитать изъ 14 десятковъ, что и даетъ въ разности 5 десятковъ. Цыфру 5 пишемъ подъ десятками. Слѣдующую цыфру 4 надо вычитать уже не изъ нуля, а изъ 9, что даетъ въ разности 5; цыфру 5 пишемъ подъ сотнями. Наконецъ 5 тысячъ изъ 11 тысячъ даетъ въ разности 6 тысячъ; цыфру 6 ставимъ подъ тысячами. Искомая разность будетъ 6557.

Итакъ, *при вычитаніи многозначныхъ чиселъ пишутъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы одного разряда стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ; потомъ, начиная съ перваго столбца отъ правой руки, вычитаютъ каждую нижнюю цыфру изъ соотвѣтствующей ей верхней и разность пишутъ подъ столбцомъ; если какая-нибудь цыфра вычитаемаго больше соотвѣтствующей цыфры уменьшаемаго, то занимаютъ у слѣдующей влѣво цыфры уменьшаемаго одну единицу и вмѣсто нея придаютъ 10 къ той, изъ которой должно было вычитать; если же слѣдующая цыфра нуль, то занимаютъ у первой, слѣдующей за этимъ нулемъ, значащей цыфры одну единицу и придаютъ 10 къ той цыфрѣ, изъ которой нужно было вычитать, а нуль считаютъ за 9. Такъ же поступаютъ, если будетъ нѣсколько нулей сряду.*

Если каждая цыфра вычитаемаго будетъ менѣе соотвѣтствующей цыфры уменьшаемаго, то все равно, съ какой руки ни начать вычитаніе,—съ правой или съ лѣвой; напр. изъ 768 вычесть 326; 3 изъ 7-ми 4; 2 изъ 6-и 4; 6 изъ 8-и 2; поэтому 768—326=442.

Но если нѣкоторыя цыфры вычитаемаго будутъ больше соотвѣтствующихъ цыфръ уменьшаемаго, то выгоднѣе дѣлать вычитаніе отъ правой руки къ лѣвой Положимъ напр., что нужно изъ 7465 вычесть 2837. Начнемъ вычитать съ лѣвой руки: 2 изъ 7 пять; 8 изъ 4 нельзя вычесть; нужно занять единицу у 7 тысячъ и вычесть 8 изъ 14, получимъ 6; но тысячъ осталось уже 6, а 2 изъ 6-ти четыре; слѣд. въ разности нужно измѣнить цыфру 5 (которая уже написана) на 4; далѣе,—3 изъ 6-ти три; 7 изъ 5 нельзя вычесть, нужно занять у 6 десятковъ; а потому и цыфру десятковъ въ разности нужно также измѣнить изъ 3 на 2.

Надо пріучиться складывать однозначныя числа сразу, говоря прямо 5 да 3 восемь, 8 да 2—десять, 10 да 6—шестнадцать.

Мы складывали данныя числа отъ перваго къ послѣднему; но очевидно, если бы мы стали складывать ихъ наоборотъ отъ послѣдняго къ первому, или начали бы съ какого-нибудь средняго слагаемаго, лишь бы только взяли всѣ слагаемыя, то сумма, содержа въ себѣ всѣ единицы, изъ которыхъ состояли слагаемыя, была бы одна и та же. Поэтому отъ *перемѣны порядка слагаемыхъ сумма не измѣняется.*

16. Сложеніе многозначныхъ чиселъ. Пусть дано сложить числа 867, 345 и 537. Придавать къ числу 867 по одной всѣ 345 единицъ, изъ которыхъ состоитъ второе число, потомъ къ полученной суммѣ придавать всѣ единицы, изъ которыхъ состоитъ число 537, было бы и долго, и утомительно. Легче сдѣлать сложеніе такъ: единицы всѣхъ данныхъ чиселъ сложить между собою, десятки между собою, сотни между собою; при этомъ придется складывать только однозначныя числа; а сумма, содержа всѣ единицы, всѣ десятки, всѣ сотни данныхъ чиселъ, будетъ состоять изъ столькихъ простыхъ единицъ, сколько ихъ есть во всѣхъ слагаемыхъ вмѣстѣ. Чтобы не сложить единицъ различныхъ разрядовъ, мы подпишемъ числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями.

$$\begin{array}{r} 867 \\ +345 \\ 537 \\ \hline 1749 \end{array}$$

Подъ послѣднимъ слагаемымъ проведемъ черту и будемъ складывать цыфры перваго столбца справа: 7 да 5 будетъ 12, 12 да 7 составляетъ 19 единицъ, т. е. одинъ десятокъ и 9 единицъ. Цыфру 9 напишемъ подъ столбцомъ единицъ; а 1 десятокъ, какъ говорятъ, оставимъ на время *въ умѣ* и приложимъ его потомъ къ суммѣ десятковъ.

Наконецъ складываемъ десятки: 6 да 4=10, 10 да 3=13, да 1 десятокъ, удержанный въ умѣ,=14 десятковъ, т. е. 1 сотня и 4 десятка. Подписываемъ 4 подъ столбцомъ десятковъ, а 1 сотню удерживаемъ въ умѣ.

Потомъ складываемъ сотни: 8 да 3=11, 11 да 5=16; 16 да 1 сотня, удержанная въ умѣ,=17 сотенъ. Это число подписываемъ подъ столбцомъ сотенъ сполна, потому что единицъ слѣдующаго разряда въ слагаемыхъ нѣтъ. Сумма будетъ 1749.

Мы начали складывать числа съ правой руки; попробуемъ теперь начать съ лѣвой. Сложивши числа въ первомъ столбцѣ слѣва, мы получимъ 16; это число и надо бы написать подъ первымъ столбцомъ; но сложивъ десятки, получимъ 13 десятковъ, т. е. 3 десятка сотню; эту сотню нужно придать къ прежде полученнымъ 16

сотнямъ; слѣд. цыфру 6, уже написанную нами, придется зачеркнуть и поставить вмѣсто нея 7. Точно также, сложивъ единицы, увидимъ, что и цыфру 3, написанную подъ десятками, надо перемѣнить на 4, такъ какъ отъ сложенія единицъ получится число 19, состоящее изъ 9 единицъ и 1 десятка, который и надо придать къ прежде полученнымъ 3 десяткамъ. Такимъ образомъ сложеніе начинаютъ съ правой руки только затѣмъ, чтобы легче было придать цыфру, удержанную въ умѣ, къ суммѣ цыфръ слѣдующаго влѣво столбца; иначе подъ каждымъ столбцомъ приходилось бы перемѣнять цыфру, написанную прежде, чѣмъ сложены были цыфры слѣдующаго вправо столбца.

Когда сумма цыфръ каждаго столбца не превышаетъ 9, то совершенно все равно, откуда начать сложеніе—съ правой ли руки, или съ лѣвой, или наконецъ, съ какого угодно средняго столбца.

Итакъ, *при сложеніи многозначныхъ чиселъ, слагаемыя подписываютъ одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного разряда стояли въ одномъ столбцѣ* (т. е. единицы подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д.); *подъ послѣднимъ слагаемымъ проводятъ черту и сумму пишутъ подъ нею. Сложеніе начинаютъ отъ правой руки, т. е. сперва окладываютъ цыфры перваго столбца, или простыя единицы; если сумма ихъ не больше 9, то подъ столбцомъ единицъ подписываютъ только цыфру единицъ этой суммы, а цыфру десятковъ прикладываютъ къ суммѣ цыфръ слѣдующаго столбца, т. е. десятковъ. Такъ же точно складываютъ столбецъ десятковъ и слѣдующіе за нимъ столбцы до послѣдняго, подъ которымъ пишутъ сполна всю сумму его цыфръ. Полученное число, написанное подъ чертою, и будетъ сумма.*

Примѣры: 1) 3067+5789+23+205+70+1028=10182.
2) 378+2069+680+3009=6136.
3) 502+618+39+8+1275=2442.

17. Если дано сложить много чиселъ, то можно сложить сперва нѣсколько изъ нихъ, потомъ нѣсколько другихъ, наконецъ остальныя и затѣмъ сложить всѣ полученныя суммы.

Напр. 508+1017+32+48+206+1009+306+5103+709+
+918+70+5+1230+4+1037+2938+75+6.

Здѣсь дано сложить 18 чиселъ; сложивъ шесть первыхъ, потомъ шесть вторыхъ и шесть третьихъ, получимъ три суммы 2820, 7411 и 5290. Сложивъ эти суммы, получимъ 15521.

18. Повѣрка сложенія. Складывая числа, можно иногда ошибиться, особенно если слагаемыхъ много; тогда полученная сумма будетъ невѣрна. Напр.; еслибы нужно было сложить 378+506+419, и кто-нибудь, складывая разрядъ единицъ, сказалъ бы 9 да 6 тринадцать, да 8=20, и затѣмъ складывалъ бы вѣрно, то онъ получилъ бы въ суммѣ 1300; это число невѣрно, потому что 9 да 6 не

13, а 15, и истинная сумма есть 1303, а не 1300. Можно также ошибиться и при другихъ дѣйствіяхъ, которыя производятся съ числами; поэтому нужно найти способы, по которымъ бы можно было узнать, вѣрно ли сдѣлано дѣйствіе или нѣтъ; иначе говоря, нужно умѣть *повѣрить дѣйствіе. Чтобы повѣрить сложеніе, нужно пересложить числа вновь, измѣнивши только порядокъ, въ которомъ складывали цыфры каждаго столбца;* т. е. если прежде складывали сверху внизъ, то должно складывать снизу вверхъ—и обратно; *или можно сложить данныя числа, написавъ ихъ въ другомъ порядкѣ, чѣмъ они были написаны прежде; также можно отчеркнуть одно слагаемое, а остальныя сложить и къ суммѣ ихъ придать отчеркнутое слагаемое; если въ результатѣ получится то же число, какое получили и до повѣрки, то можно заключить, что сложеніе сдѣлано вѣрно*. Напр., если хотимъ повѣрить 789+508+617+2348=4382, то сложимъ только 789+508+617; получимъ 1914; сложивши 1914 съ послѣднимъ слагаемымъ 2348, находимъ въ суммѣ 4262; такъ какъ въ первомъ случаѣ получилась сумма 4382, а во второмъ 4262; то слѣд. мы или въ первый разъ сложеніе сдѣлали невѣрно, или при самой повѣркѣ ошиблись. Пересложивши данныя числа во второй разъ, видимъ, что мы ошиблись прежде, и что сумма=4262.

19. *Всякій вопросъ, въ которомъ требуется найти одно или нѣсколько неизвѣстныхъ чиселъ посредствомъ различныхъ дѣйствій съ данными числами, наз. задачею. Рѣшить задачу—значитъ опредѣлить неизвѣстныя числа, произведя дѣйствія надъ данными числами.*

20. *Сложеніе употребляется при рѣшеніи такихъ задачъ*, въ *которыхъ требуется найти число, равное нѣсколькимъ данымъ числамъ, вмѣстѣ взятымъ;* или *когда одно число приходится увеличить столькими единицами, сколько ихъ есть въ другомъ*. Напр.

1) Въ училищѣ 4 класса: въ первомъ 29 учениковъ, во второмъ 35, въ третьемъ 31, въ четвертомъ 17. Сколько всего учениковъ въ училищѣ?

Для рѣшенія вопроса надо изъ 4 данныхъ чиселъ 29, 35, 31 и 17 составить одно, равное имъ всѣмъ, вмѣстѣ взятымъ, слѣд. надо сложить ихъ; 29+35+31+17=112, поэтому въ училищѣ 112 учениковъ.

2) За сколько надо продать товаръ, стоящій 650 руб., чтобы получить прибыли 84 руб.?

Товаръ надо продать дороже того, что онъ стоитъ, на столько руб., сколько мы желаемъ получить прибыли; слѣд. число 650 надо увеличить 84-мя единицами, т. е. сложить 650 и 84. Итакъ, товаръ надо продать за 650+84=734 рубля.

Замѣтимъ, что при рѣшеніи этихъ задачъ мы складывали данныя числа, какъ будто бы они были отвлеченныя, и только въ суммѣ

поставили название той единицы, о которой шло дѣло; именно въ первой задачѣ 112 *учениковъ*, а во второй 734 *рубля*.

21. **Вопросы.** 1) Что наз. сложеніемъ? 2) Какъ наз. числа, данныя для сложенія, и число, которое получается отъ этого дѣйствія? 3) Какъ наз. знакъ сложенія? какъ онъ пишется? гдѣ ставится? 4) Какъ дѣлается сложеніе однозначныхъ чиселъ? 5) Какъ дѣлается сложеніе многозначныхъ чиселъ? 6) Зачѣмъ слагаемыя подписываются одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного и того же разряда находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ? 7) Можно ли складывать числа, не подписывая ихъ. одно подъ другимъ? 8) Почему сложеніе начинается съ правой руки? 9) Въ какомъ случаѣ все равно, откуда ни начать сложеніе? 10) Какъ дѣлается сложеніе въ тѣхъ случаяхъ, когда слагаемыхъ очень много? 11) Что значитъ повѣрить дѣйствіе? 12) Какъ повѣрить сложеніе? 13) Что наз. задачею? 14) Какія задачи рѣшаются посредствомъ сложенія? 15) Какъ увеличить данное число нѣсколькими единицами? 16) Увеличить 7 пятью? 8 двадцатью девятью? 17) Составить нѣсколько задачъ на сложеніе?

ВЫЧИТАНІЕ.

22. Изъ 27 листовъ бумаги взято 15 листовъ; сколько осталось? Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, слѣдовало бы изъ 27 листовъ брать по одному всѣ 15 листовъ, которые нужно отнять, и пересчитать потомъ оставшіеся листы. Каждый листъ при етомъ счетѣ былъ бы единицею, и мы не досчитали бы изъ 27 стольких единицъ, сколько ихъ было въ другомъ числѣ 15. При рѣшеніи этой задачи, мы изъ двухъ данныхъ чиселъ (27 и 15) посредствомъ простого счета составили бы новое число, отнявъ отъ бóльшаго числа столько единицъ, сколько ихъ находится въ меньшемъ; но гораздо скорѣе можно найти это число, произведя надъ данными числами дѣйствіе, наз. *вычитаніемъ*. Слѣд. *вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ двухъ данныхъ чиселъ мы составляемъ третье, отнимая отъ бóльшаго столько единицъ, сколько ихъ содержится въ меньшемъ.*

Числа, данныя для вычитанія, имѣютъ особыя названія: то, отъ котораго отнимаютъ, наз. *уменьшаемымъ*; а то, которое отнимаютъ, наз. *вычитаемымъ*; число же, которое получается, наз. *остаткомъ* или *разностью*. Чтобы показать, что одно число надо вычесть изъ другого, пишутъ уменьшаемое, потомъ ставятъ знакъ вычитанія —, наз. *минусъ*, за нимъ пишутъ вычитаемое; напр. для обозначенія того, что изъ 27 надо вычесть 15, пишутъ 27—15.

23. Вычитаніе однозначнаго числа изъ однозначнаго. Чтобы вычесть напр. 5 изъ 8, надо отъ 8 отнимать послѣдовательно по одной всѣ единицы, изъ которыхъ состоитъ 5, говоря: 1 изъ 8-ми будетъ 7, 1 изъ 7-и шесть, 1 изъ 6-ти пять, 1 изъ 5-ти четыре, 1 изъ 4-хъ три; 3 и будетъ разность, такъ что 8—5=3.

Для ускоренія хода дѣйствія, слѣдуетъ пріучиться вычитать однозначныя числа сразу, прямо говоря 5 изъ 8-ми—три, 4 изъ 9-и пять, 2 изъ 8-и шесть, 2 изъ 4-хъ два и т. под.

24. Вычитаніе однозначнаго числа изъ двузначнаго. Пусть надо вычесть 6 изъ 23. По предыдущему слѣдуетъ отнимать отъ 23 послѣдовательно всѣ 6 единицъ, изъ которыхъ состоитъ меньшее число, говоря: 1 изъ 23 будетъ 22; 1 изъ 22-хъ 21, 1 изъ 21-го 20, 1 изъ 20-ти 19, 1 изъ 19-ти 18, 1 изъ 18-ти 17. Послѣднее число и будетъ разность. И въ этомъ случаѣ, какъ въ предыдущемъ надо пріучиться дѣлать вычитаніе сразу; такъ слѣдуетъ прямо говорить: 8 изъ 13-ти пять, 7 изъ 16-ти девять, 5 изъ 24-хъ девятнадцать, 9 изъ 83-хъ семьдесятъ четыре и т. под.

25. Вычитаніе многозначныхъ чиселъ. Пусть дано вычесть 2535 изъ 7839. Отнимать отъ бо́льшаго числа по одной всѣ 2535 единицъ, изъ которыхъ состоитъ меньшее число, было бы очень долго и утомительно; поэтому мы сдѣлаемъ слѣдующее сокращеніе. Подпишемъ вычитаемое число подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы находились подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д. Подъ вычитаемымъ проведемъ черту. Потомъ будемъ вычитать

$$\begin{array}{r} 7839 \\ -2535 \\ \hline 5304 \end{array}$$

единицы изъ единицъ, десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ и т. д. Вычитать при этомъ придется только однозначныя числа, что мы уже умѣемъ дѣлать; а между тѣмъ, отнявши единицы, десятки, сотни и т. д., изъ которыхъ состоитъ второе число, мы отнимемъ всѣ единицы, изъ которыхъ оно состоитъ, отъ бо́льшаго числа. Итакъ, начиная съ единицъ, говоримъ: 5 единицъ изъ 9-и даютъ 4 единицы, которыя и пишемъ подъ столбцомъ единицъ.

Отнимая 3 десятка отъ 3-хъ десятковъ, въ остаткѣ не получимъ ничего; поэтому подъ столбцомъ десятковъ ставимъ 0.

Вычитая 5 сотенъ изъ 8 сотенъ, получимъ 3 сотни, которыя и пишемъ подъ столбцомъ сотенъ.

Наконецъ, вычитая 2 тысячи изъ 7 тысячъ, получимъ 5 тысячъ, которыя пишемъ подъ столбцомъ тысячъ. Полученное число 5304 и будетъ искомая разность, такъ что 7839—2535=5304.

Возьмемъ другой примѣръ. Пусть надо вычесть 5496 изъ 12053.

$$\begin{array}{r} \dot{}\dot{}\dot{}\;\; \\ 12053 \\ -5496 \\ \hline 6557 \end{array}$$

Здѣсь представляется затрудненіе: нельзя 6 единицъ вычесть изъ 3-хъ единицъ. Чтобы сдѣлать вычитаніе возможнымъ, занимаемъ у 5-и десятковъ одинъ и вмѣсто него придаемъ 10 единицъ къ тѣмъ

3-мъ, изъ которыхъ надо было вычесть. Теперь 6 единицъ можно вычесть изъ 13-и; разность 7 пишемъ подъ столбцомъ единицъ; а чтобы не забыть, что у пяти десятковъ занятъ одинъ, надъ цыфрою 5 ставимъ точку.

Теперь приходится вычитать 9 десятковъ изъ 4-хъ десятковъ, что опять невозможно; слѣдовало бы у сотенъ занять одну; но сотенъ въ уменьшаемомъ совсѣмъ нѣтъ, ибо на мѣстѣ сотенъ стоитъ 0; поэтому мы занимаемъ у первой, слѣдующей за нулемъ, значащей цыфры 2 одну единицу, т. е. одну тысячу, и вмѣсто нея придаемъ 9 сотенъ къ нулю, а вмѣсто остальной, десятой, сотни придавить 10 десятковъ къ тѣмъ 4-мъ, изъ которыхъ нельзя было вычесть 9 дв.; надъ цыфрою тысячъ 2 ставимъ точку; 9 десятковъ теперь нужно будетъ уже вычитать изъ 14 десятковъ, что и даетъ въ разности 5 десятковъ. Цыфру 5 пишемъ подъ десятками. Слѣдующую цыфру 4 надо вычитать уже не изъ нуля, а изъ 9, что даетъ въ разности 5; цыфру 5 пишемъ подъ сотнями. Наконецъ 5 тысячъ изъ 11 тысячъ даетъ въ разности 6 тысячъ; цыфру 6 ставимъ подъ тысячами. Искомая разность будетъ 6557.

Итакъ, *при вычитаніи многозначныхъ чиселъ пишутъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы одного разряда стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ; потомъ, начиная съ перваго столбца отъ правой руки, вычитаютъ каждую нижнюю цыфру изъ соотвѣтствующей ей верхней и разность пишутъ подъ столбцомъ; если какая-нибудь цыфра вычитаемаго больше соотвѣтствующей цыфры уменьшаемаго, то занимаютъ у слѣдующей влѣво цыфры уменьшаемаго одну единицу и вмѣсто нея придаютъ 10 къ той, изъ которой должно было вычитать; если же слѣдующая цыфра нуль, то занимаютъ у первой, слѣдующей за этимъ нулемъ, значащей цыфры одну единицу и придаютъ 10 къ той цыфрѣ, изъ которой нужно было вычитать, а нуль считаютъ за 9. Такъ же поступаютъ, если будетъ нѣсколько нулей сряду.*

Если каждая цыфра вычитаемаго будетъ менѣе соотвѣтствующей цыфры уменьшаемаго, то все равно, съ какой руки ни начать вычитаніе,—съ правой или съ лѣвой; напр. изъ 768 вычесть 326; 3 изъ 7-ми 4; 2 изъ 6-и 4; 6 изъ 8-и 2; поэтому 768 − 326 = 442.

Но если нѣкоторыя цыфры вычитаемаго будутъ больше соотвѣтствующихъ цыфръ уменьшаемаго, то выгоднѣе дѣлать вычитаніе отъ правой руки къ лѣвой. Положимъ напр., что нужно изъ 7465 вычесть 2837. Начнемъ вычитать съ лѣвой руки: 2 изъ 7 пять; 8 изъ 4 нельзя вычесть; нужно занять единицу у 7 тысячъ и вычесть 8 изъ 14, получимъ 6; но тысячъ осталось уже 6, а 2 изъ 6-ти четыре; слѣд. въ разности нужно измѣнить цыфру 5 (которая уже написана) на 4; далѣе,—3 изъ 6-ти три; 7 изъ 5 нельзя вычесть, нужно занять у 6 десятковъ; а потому и цыфру десятковъ въ разности нужно также измѣнить изъ 3 на 2.

26. Возвратимся къ задачѣ, предложенной въ началѣ: изъ 27 листовъ бумаги взято 15; сколько осталось? Чтобы рѣшить вопросъ, надо, какъ мы видѣли, вычесть 15 изъ 27. Сдѣлавъ это, найдемъ, что бумаги осталось 12 листовъ. Понятно, что еслибы взятые 15 листовъ мы опять приложили къ тѣмъ 12, которые остались, то получили бы прежнее число листовъ, т. е. 27. Слѣд. если къ остатку придать вычитаемое, то получится уменьшаемое; или *уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ разностью*. Кромѣ того, такъ какъ надо приложить 12 листовъ къ 15-ти, чтобы вышло 27 листовъ, то заключаемъ, что 27 листовъ больше 15-ти двѣнадцатью листами. Слѣд., *разность показываетъ, сколькими единицами* (или *чѣмъ*) *уменьшаемое больше вычитаемаго*, и также, *сколькими единицами* (или *чѣмъ*) *вычитаемое меньше уменьшаемаго*.

Такъ какъ уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ разностью, то слѣд. на уменьшаемое можно смотрѣть, какъ на сумму, а на вычитаемое и разность, какъ на слагаемыя; и такъ какъ при вычитаніи даются два числа—уменьшаемое, т. е. сумма, и вычитаемое, т. е. одно изъ слагаемыхъ, а отыскивается посредствомъ нихъ новое число—разность, т. е. другое слагаемое, то можно сказать, что *вычитаніе есть такое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ двухъ чиселъ и одному слагаемому находится другое слагаемое*.

27. Повѣрка вычитанія. Изъ предыдущего видно, что *для повѣрки вычитанія должно разность сложить съ вычитаемымъ, и если вычитаніе и сложеніе будутъ сдѣланы вѣрно, то сумма должна равняться уменьшаемому*.

Такъ, если, вычти 7864 изъ 15142, найдемъ 7278, то для повѣрки складываемъ вычитаемое 7864 съ разностью 7278, получимъ 15142, т. е. уменьшаемое; слѣд. вычитаніе сдѣлано вѣрно.

Чтобы повѣрить вычитаніе, можно также вычесть разность изъ уменьшаемаго; въ результатѣ должны получить вычитаемое. Это видно изъ того, что уменьшаемое есть сумма двухъ слагаемыхъ—вычитаемаго и разности; вычтя изъ суммы одно изъ слагаемыхъ, мы должны получить другое. Положимъ напр., что при вычитаніи 475 изъ 832 получили въ остаткѣ 357; для новѣрки дѣйствіи вычитаемъ 357 изъ 832, находимъ 475; слѣд. дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

28. *При рѣшеніи задачъ вычитаніе употребляется въ тѣхъ случаяхъ, когда вопросъ приводитъ къ тому, чтобы узнать разность двухъ чиселъ, или узнать, чѣмъ одно число болѣе или менѣе другого, или уменьшить число на сколько-нибудь единицъ, или по данному цѣлому и одной части найти другую его часть*. Напр.

1) Я имѣю 284 рублей, а братъ мой 597 руб.; сколькими рублями ата больше денегъ, чѣмъ у меня?

я рѣшеніи вопроса надо узнать, чѣмъ 597 руб. болѣе 284 руб.;

слѣд. надо 284 вычесть изъ 597; разность будетъ 313; поэтому у брата 313-ю рублями больше денегъ, чѣмъ у меня.

2) Купецъ продалъ товаръ за 2560 руб., при чемъ получилъ прибыли 385 руб.; сколько онъ самъ заплатилъ за товаръ?

Чтобы узнать это, надо найти число, которое на 385 руб. было бы меньше 2560 руб.; т. е. надо изъ 2560 вычесть 385; получимъ 2175; слѣд. купецъ самъ заплатилъ за товаръ 2175 руб.

3) Отъ куска сукна въ 125 арш. осталось 94 арш.; сколько арш. этого сукна продано?

При рѣшеніи этой задачи приходится по данному цѣлому и одной части отыскать другую часть; слѣд. изъ 125 надо вычесть 94; 125—94=31; поэтому продано 31 аршинъ сукна.

Замѣтимъ, что при рѣшеніи этихъ задачъ мы дѣлали вычитаніе такъ, какъ будто бы данныя числа были отвлеченныя, и только въ разности поставили названіе той единицы, о которой шло дѣло.

29. **Ариѳметическое дополненіе.** *Ариѳметическимъ дополненіемъ числа наз. разность между этимъ числомъ и единицею слѣдующаго высшаго разряда*; такъ ариѳм. доп. 36-и=100—36=64; ариѳм. доп. 2578=10000—2578=7422 и т. под.

Изъ правила вычитанія слѣдуетъ, что для нахожденія ариѳм. доп. какого-нибудь числа, нужно всѣ цыфры этого числа, начиная слѣва, вычесть изъ 9, исключая послѣдней, которую вычесть изъ 10.

Посредствомъ ариѳм. доп. можно вычитаніе замѣнить сложеніемъ. Пусть напр. дано вычесть 57268 изъ 112436. Отнявъ отъ уменьшаемаго и придавъ къ нему единицу со столькими нулями, сколько цыфръ въ вычитаемомъ, получимъ 112436 — 57268 = 112436 — 100000 + +100000—57268; но 112436—100000=12436, а 100000—57268= =ариѳм. доп. 57268; слѣд.

112436—57268=12436+ар. доп. 57268.

Пусть еще дано 5621—3497. Поступая по предыдущему, найдемъ 5621—10000+10000—3497. Такъ какъ изъ 5621 нельзя вычесть 10000, то должно прежде 5621 сложить съ ариѳ. доп. 3497—я отъ суммы отнять 10000; получимъ

5621—3497=5621+6503—10000=12124—10000=2124.

Замѣна вычитанія сложеніемъ приноситъ не малую пользу въ тѣхъ случаяхъ, когда надо сдѣлать нѣсколько сложеній и вычитаній. Пусть напр. дано 54371—3548+5513—479+364—17. Взявъ ариѳм. доп. всѣхъ вычитаемыхъ и уменьшивъ всѣ уменьшаемыя на единицу съ соотвѣтствующимъ числомъ нулей, получимъ

44371+6452+4613+521+264+83=56304.

30. **Вопросы.** 1) Что наз. вычитаніемъ? 2) Какъ наз. числа, данныя для вычитанія, и число, которое получается при этомъ дѣйствіи? 3) Какъ наз. знакъ вычитанія? Какъ онъ пишется? Гдѣ ставится? 4) Какъ дѣлается вычитаніе многозначныхъ чиселъ? 5) Почему вычитаніе начинается съ правой руки? 6) Можно ли начать вычитаніе съ лѣвой руки? 7) Въ какомъ случаѣ все равно, откуда ни начать вычитаніе? 8) Почему, занимая у цыфры уменьшаемаго единицу, мы придаемъ къ слѣдующей за нею вправо цыфрѣ 10, а не другое число?

9) Какъ составляется уменьшаемое изъ вычитаемаго и разности? 10) Какъ повѣрить вычитаніе? 11) Сумма двухъ чиселъ есть 17; одно изъ нихъ есть 9; найти другое? 12) Изъ какого числа надо вычесть 7, чтобы получить въ остаткѣ 5? 13) Что сдѣлается съ числомъ, если изъ него вычесть 8? 14) Я задумалъ число; если вычесть изъ него 6, то получится 16; какое число я задумалъ? 15) Разность двухъ чиселъ есть 9; большее число=15; найти меньшее? 16) Разность двухъ чиселъ есть 3; меньшее=7; найти большее? 17) Сколько надо вычесть изъ 24, чтобы получить въ остаткѣ 17? 18) Найти число, которое меньше 15-ти на 9? 19) Какое число меньше 23-хъ 17-ю? 20) Разность двухъ чиселъ есть 15; меньшее=7; найти большее? 21) Зная уменьшаемое и разность, какъ найти вычитаемое? 22) Зная вычитаемое и разность, какъ найти уменьшаемое? 23) Посредствомъ какого дѣйствія число увеличивается на сколько-нибудь единицъ? уменьшается сколькими-нибудь единицами? 24) Какія задачи рѣшаются посредствомъ вычитанія? 25) Какъ по данной суммѣ двухъ чиселъ и одному изъ слагаемыхъ найти другое слагаемое? 26) Составить нѣсколько задачъ на вычитаніе?

УПОТРЕБЛЕНІЕ СКОБОКЪ ПРИ СЛОЖЕНІИ И ВЫЧИТАНІИ.

31. Возьмемъ задачу: сумму чиселъ 245, 126 и 29 вычесть изъ разности чиселъ 1438 и 964 и полученную разность вычесть изъ 75?

Чтобы рѣшить эту задачу, надо сложить 245, 126 и 29, при этомъ найдемъ сумму 400; потомъ вычесть 964 изъ 1438, найдемъ разность 474; изъ 474 надо вычесть найденную сумму 400, получимъ новую разность 74, и наконецъ, вычтя 74 изъ 75, получимъ 1.

Такимъ образомъ въ нашей задачѣ приходится производить дѣйствія съ данными числами, потомъ съ результатами, полученными отъ этихъ дѣйствій, производить новыя дѣйствія, и т. д. Всѣ эти послѣдовательныя дѣйствія можно обозначить разомъ. Для этого обозначимъ сначала тѣ дѣйствія, которыя надо произвести непосредственно съ данными числами. У насъ такихъ дѣйствій два: надо сложить числа 245, 126 и 29 и вычесть 964 изъ 1438. Напишемъ поэтому 245+126+29 и 1438—964, и чтобы показать, что результатъ перваго дѣйствія, т. е. сумму первыхъ трехъ чиселъ, надо вычесть изъ результата другого дѣйствія, т. е. изъ разности двухъ послѣднихъ, мы оба эти выраженія заключимъ въ скобки и поставимъ между ними знакъ минусъ; т. е. напишемъ:

(1438—964)-(245+126+29). Если бы не написали скобокъ во второмъ выраженіи, а только въ первомъ, т. е. написали бы

(1438—964)—245+126+29, то это значило бы, что изъ разности первыхъ двухъ чиселъ надо вычесть только одно число 245, а не всю сумму. Что же касается до выраженія 1438—964, то его можно было бы и не заключать въ скобки; т. е. можно было бы написать 1438 — 964 — (245 + 126 + 29); результатъ дѣйствія въ этомъ случаѣ будетъ такой же, какъ и прежде, т. е. 74; но такъ какъ

написанное выраженіе надо было бы читать такъ: изъ числа 1438 вычесть сначала 964, а потомъ вычесть сумму чиселъ 245, 126 и 29, то чтобы точнѣе выразить условіе задачи, что сумму надо вычесть *изъ разности* чиселъ 1438 и 964, мы первое выраженіе, т. е. 1438—964, также заключимъ въ скобки. Далѣе, такъ какъ въ задачѣ требуется новую разность, полученную отъ вычитаніи суммы 245+126+29 изъ разности 1438—964, вычесть еще изъ 75, то мы обозначимъ это, заключивъ выраженіе

(1438—964)—(245+126+29) въ новыя скобки и отдѣливъ его знакомъ минусъ отъ 75; т., е. напишемъ:

$$75-\{(1438-964)-(245+126+29)\}.$$

Мы видѣли, что, произведи всѣ показанныя дѣйствія, получимъ въ результатѣ единицу; слѣд.

$$75-\{(1438-964)-(245+126+29)\}=1.$$

Возьмемъ еще задачу: изъ разности чиселъ 597 и 349, увеличенной разностью чиселъ 245 и 168, вычесть разность 1000 и суммы чиселъ 325, 150 и 200?

Чтобы обозначить етотъ рядъ дѣйствій, мы напишемъ разности 597—349 и 245—168, заключимъ каждое изъ этихъ выраженій въ скобки и поставимъ между ними знакъ плюсъ; т. е. напишемъ (597—349)+(245—168). Такъ какъ, по условію задачи, изъ результата этихъ дѣйствій надо вычесть разность, полученную отъ вычитанія суммы 325+150+200 изъ 1000, то, написавъ

1000—(325+150+200), мы заключимъ все это выраженіе въ новыя скобки и отдѣлимъ знакомъ минусъ отъ предыдущаго, заключеннаго также въ новыя скобки, т. е. напишемъ:

$$[(597-349)+(245-168)]-[1000-(325+150+200)].$$

Произведя всѣ показанныя дѣйствія, получимъ въ результатѣ 0. Итакъ *если надо обозначить, что съ результатомъ, полученнымъ отъ сложенія или вычитанія данныхъ чиселъ, надо произвести новое сложеніе или вычитаніе, то его заключаютъ въ скобки и соединяютъ знакомъ + или — съ другимъ числомъ или съ другимъ подобнымъ результатомъ.*

32. Обратно, если бы написано было такое выраженіе:

$$[35-(148-123)]-[(45+8+6)-53],$$

то его надо бы прочесть такъ: изъ результата, полученнаго отъ вычитанія разности 148 и 123 изъ числа 35, вычесть результатъ, полученный отъ вычитенія 53 изъ суммы чиселъ 45, 8 и 6. Поэтому надо сначала вычесть 123 изъ 148, полученную разность вычесть изъ 35; слѣд. первый результатъ есть 10. Потомъ, вычти 53 изъ 45+8+6=59, найдемъ, что второй реаультатъ есть 6; и наконецъ, вычитая 6 изъ 10, найдемъ что

$$[35-(148-123)]-[(45+8+6)-53]=4.$$

Вотъ еще выраженіе: $\{25-(40-22)]+[(62-15)-3]\}-50$.

Это значитъ: изъ суммы результатовъ, полученныхъ отъ выч-

танія разности 40 и 22 изъ 25 и отъ вычитанія 3 изъ разности 62 и 15, вычесть 50.

Такъ какъ $40 - 22 = 18$, то $25 - (40 - 22) = 25 - 18 = 7$; $62-15=47$; слѣд. $(62-15)-3=47-3=44$; а потому

$$\{[25 - (40 - 22)] + [(62 - 15) - 3]\} - 50 = \{7 + 44\} - 50 = \\ = 51 - 50 = 1.$$

Замѣтимъ, что скобки ( ) наз. простыми скобками; [ ] наз. квадратными, а { }—фигурными скобками.

33. **Вопросы**. 1) Когда употребляются скобки? 2) Составить задачу, для рѣшенія которой нужно сумму 20, 36 и 44 фунтовъ вычесть изъ суммы 58 и 73 фун.? 3) Составить задачу, которая рѣшалась бы вычитаніемъ разности 64 и 26 коп. изъ разности 68 и 19 коп.? 4) Составить задачу, для рѣшенія которой нужно сумму 23 фун. и 15 фун. вычесть изъ разности 48 фун. и 6 фун.?

ИЗМѢНЕНІЯ СУММЫ И РАЗНОСТИ.

34. Измѣненія суммы. Такъ какъ сумма заключаетъ въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ есть во всѣхъ слагаемыхъ, то какъ скоро число единицъ какого-нибудь слагаемаго увеличится, столькими же единицами должна увеличиться и сумма. Обратно, если какое-нибудь изъ слагаемыхъ сдѣлается меньше на сколько нибудь единицъ, на столько же единицъ должна сдѣлаться меньше и сумма. Итакъ, *если къ слагаемому придать какое-нибудь число, то сумма увеличится тѣмъ же числомъ. Если отъ слагаемаго отнять какое-нибудь число, то сумма уменьшится тѣмъ же числомъ.*

Изъ предыдущего слѣдуетъ, что *сумма останется безъ перемѣны, если къ одному слагаемому придать сколько-нибудь единицъ, а отъ другого отнять столько же единицъ.*

Зная, какъ измѣняется сумма отъ измѣненія одного слагаемаго, легко уже найти, какая перемѣна произойдетъ въ ней отъ измѣненія нѣсколькихъ слагаемыхъ. Напр., что произойдетъ съ суммою четырехъ слагаемыхъ, если къ первому придадимъ 25, къ четвертому 8 и отнимемъ отъ второго 15, а отъ третьяго 7?

Отъ перваго и четвертаго сумма увеличится на $25+8$, т. е. на 33 единицы; а отъ второго и третьяго уменьшится на $15+7$, т. е. на 22 единицы. Такъ какъ она увеличивается на бо́льшее число единицъ, чѣмъ на сколько уменьшается, то она увеличится, но не на 33 единицы, а на $33-22$, т. е. на 11 единицъ.

35. Измѣненія разности. Ученикъ имѣлъ 28 коп. и истратилъ на завтракъ 15 коп.; сколько денегъ у него осталось?

Вычтя 15 изъ 28, найдемъ, что у ученика осталось 13 коп.

Если бы ученикъ имѣлъ пятью копѣйками больше, т. е. не 28 а 33 коп., и истратилъ бы также 15 коп., то у него осталось бы не 13 коп., какъ прежде, а $33-15=18$ коп., т. е. осталось бы

больше прежняго пятью копѣйками. Вычитаемое осталось здѣсь тоже, что и прежде, а уменьшаемое увеличилось пятью единицами; разность также увеличилась пятью единицами. Слѣд. *если уменьшаемое увеличится сколькими-нибудь единицами, то и разность увеличится столькими же единицами.*

Если бы ученикъ имѣлъ пятью копѣйками меньше, т. е. не 28 коп., а только 23 коп., и истратилъ бы тѣ же 15 коп., что и прежде, то у него осталось бы 23—15=8 коп.; т. е. меньше прежнихъ 13 коп. также пятью копѣйками. Слѣд. *если уменьшаемое уменьшится на сколько-нибудь единицъ, то и разность уменьшится на столько же единицъ.*

Если бы ученикъ, имѣя 28 коп., истратилъ не 15 коп., а пятью коп. больше, т. е. 20 коп., то у него осталось бы не 13 коп., какъ прежде, а только 8 коп.; т. е. разность уменьшилась бы пятью единицами. Слѣд. *если вычитаемое сколькими-нибудь единицами увеличивается, то разность столькими же единицами уменьшается.*

Если бы ученикъ, имѣя 28 коп., истратилъ пятью коп. меньше, чѣмъ прежде, т. е. истратилъ бы не 15, а 10 коп., то у него осталось бы не 13 коп., а 18 коп., т. е. пятью коп. больше. Слѣд. *если вычитаемое сколькими-нибудь единицами уменьшится, то разность столькими же единицами увеличится.*

Если бы ученикъ имѣлъ пе 28 коп., а пятью коп. больше, т. е. 33 коп., и истратилъ бы не 15 кон., а также пятью коп. больше, т. е. 20 коп., то у него осталось бы 33—20=13 коп., т. е. столько же денегъ, сколько *и* прежде.

Или если бы ученикъ имѣлъ питью коп. меньше, т. е. 23 коп., и истратилъ бы также пятью коп. меньше, т. е. 10 коп., то у него осталось бы 13 коп., т. е. столько же, сколько и прежде. Слѣд. *если уменьшаемое и вычитаемое увеличатся, или уменьшатся однимъ и тѣмъ же числомъ, то разность не измѣнится.*

На основаніи предыдущего легко рѣшить слѣдующіе вопросы:

1) Какая перемѣна произойдетъ въ разности, если къ уменьшаемому придать 24, а отъ вычитаемаго отнять 15?

Придавая въ уменьшаемому 24, мы увеличиваемъ разность 24-мя единицами; да отнимая 15 отъ вычитаемаго, увеличиваемъ разность еще на 15 единицъ. Итакъ разность увеличивается на 24+15, т. е. на 39 единицъ.

2) Какая перемѣна произойдетъ въ разности, если къ уменьшаемому придадимъ 36, а къ вычитаемому 48?

Если бы къ тому и другому придать по 36, то разность не измѣнилась бы; но къ вычитаемому мы придали 48, т. е. на 12 больше; слѣд. разность уменьшится на 12 единицъ.

3) Что сдѣлается съ разностью, если изъ уненьшаемаго вычесть 10, а изъ вычитаемаго 15?

Вычтя изъ уменьшаемаго 10, мы уменьшимъ разность 10-ю; а вычтя изъ вычитаемаго 15, мы увеличимъ разность 15-ю; слѣд. разность увеличится 5-ю.

4) Что сдѣлается съ разностью, если изъ уменьшаемаго вычесть 15, а къ вычитаемому придать 8?

Отъ измѣненія уменьшаемаго разность уменьшится 15-ю, а отъ измѣненія вычитаемаго 8-ю; слѣд. разность уменьшится на 23.

36. Измѣненія разности можно вывести, разсматривая уменьшаемое какъ сумму, а вычитаемое и разность какъ два слагаемыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, придавая или отнимая какое-нибудь число отъ *уменьшаемаго*, мы увеличиваемъ или уменьшаемъ этимъ числомъ сумму, и такъ какъ вычитаемое, т. е. одно слагаемое, остается безъ перемѣны, то разность, т. е. другое слагаемое, должна увеличиться или уменьшиться такимъ же числомъ. Итакъ, *съ увеличеніемъ уменьшаемаго на какое-нибудь число, разность увеличивается тѣмъ же числомъ; съ уменьшеніемъ уменьшаемаго какимъ-нибудь числомъ разность уменьшается тѣмъ же самымъ числомъ*. Наоборотъ, увеличивая вычитаемое какимъ-нибудь числомъ, мы увеличиваемъ одно изъ слагаемыхъ, и если уменьшаемое, т. е. сумма, остается безъ перемѣны, то разность, т. е. другое слагаемое, должна уменьшиться тѣмъ же числомъ. Итакъ, *съ увеличеніемъ вычитаемаго на какое-нибудь число, разность уменьшается такимъ же числомъ*. Точно также, если вычитаемое, т. е. одно изъ слагаемыхъ, уменьшается какимъ-нибудь числомъ, то чтобы сумма, т. е. уменьшаемое, осталась безъ перемѣны, другое слагаемое, т. е. разность, должна увеличиться такимъ же числомъ. Итакъ, *съ уменьшеніемъ вычитаемаго на какое-нибудь число, разность такимъ же числомъ увеличивается*.

37. Зная измѣненія суммы и разности, можно упростить сложеніе и вычитаніе въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится придавать или вычитать число, немного разнящееся отъ единицы со сколькими-нибудь нулями. Такъ пусть съ числомъ 15164 надо сложить число 9997. Второе слагаемое 3-мя единицами меньше 10000; поэтому, придавъ 10000 къ 15164, мы получимъ сумму 25164, которая будетъ 3-мя единицами болѣе настоящей; чтобы получить эту послѣднюю, мы должны отъ 25164 отнять 3 единицы; слѣд. искомая сумма равна 25161.

Точно также, пусть дано вычесть 9993 изъ 13647. Замѣтимъ, что вычитаемое 9993 меньше 10000 на 7 единицъ; а потому, отнявъ 10000 отъ 13647, мы получимъ разность 3647, которая будетъ меньше искомой 7-ю единицами; слѣд. истинная разность $=3647+7$.

38. Вопросы. 1) Какая перемѣна произойдетъ въ суммѣ, если одно слагаемое увеличится какимъ-нибудь числомъ? уменьшится на нѣсколько единицъ? 2) Что сдѣлается съ суммою, если одно изъ слагаемыхъ увеличится 5-ю? уменьшится на 7? 3) Дано было сложить нѣсколько чиселъ; при сложеніи взяли по ошибкѣ 17 вмѣсто 20 и 13 вмѣсто 16; на сколько полученная сумма больше или меньше истинной? 4) Что сдѣлается съ суммою, если одно слагаемое увеличится сколькими-нибудь единицами, а другое уменьшится столькими же единицами? 5) Что сдѣлается съ суммою, если одно слагаемое увеличит-

ся 17-ю, другое уменьшится 6-ю, а третье уменьшится 80 ю? 6) Когда разность двухъ чиселъ увеличивается? уменьшается? не измѣняется? 7) Что сдѣлается съ разностью, если въ уменьшаемому придать 25, а въ вычитаемому 13? 8) Отъ уменьшаемаго отнять 25, а отъ вычитаемаго 13? 9) Къ уменьшаемому придать 17, а отъ вычитаемаго отнять 40? 10) Отъ уменьшаемаго отнять 36, а къ вычитаемому придать 14?

УМНОЖЕНІЕ.

39. Аршинъ сукна стоитъ 4 рубля; сколько нужно заплатить за 5 арш.?

Чтобы рѣшить предложенный вопросъ, надо 4 руб. взять слагаемымъ 5 разъ, и такъ какъ 4+4+4+4+4=20, то 5 арш. стоятъ 20 руб. Здѣсь новое число 20 составляется изъ данныхъ чиселъ 4 и 5 такъ: одно число 4 берется слагаемымъ 5 разъ, т. е. столько разъ, сколько въ другомъ находится единицъ.

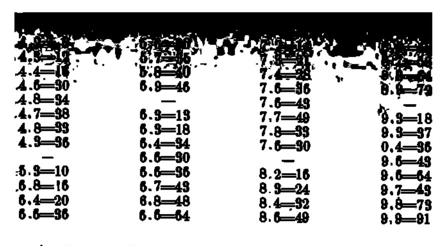
Въ данномъ примѣрѣ сложеніе не представляетъ трудности; но если бы требовалось узнать, что будутъ стоить напр. 127 арш. сукна, если каждый стоитъ 4 руб., то пришлось бы 4 руб. брать слагаемымъ 127 разъ, а это было бы и долго, и утомительно. Гораздо скорѣе можно составить новое число изъ данныхъ чиселъ, произведя надъ ними дѣйствіе, наз. *умноженіемъ*. Слѣд. *умноженіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ двухъ данныхъ чиселъ составляютъ третье, повторяя одно число слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ заключается единицъ.*

Итакъ, 5 умножить на 3 значитъ 5 взять слагаемымъ 3 раза. Число, которое нужно складывать само съ собою, наз. *множимымъ*; число, которое показываетъ, сколько разъ надо взять слагаемымъ другое число, наз. *множителемъ*; а число, которое получается отъ умноженія, наз. *произведеніемъ*. Множимое и множитель оба вмѣстѣ наз. *производителями*.

Чтобы показать, что одно число надо умножить на другое, между ними ставятъ знакъ × или точку; такъ, чтобы обозначить, что 5 надо умножить на 3, пишутъ 5×3 или 5.3.

40. Умноженіе однозначныхъ чиселъ. Чтобы умножить напр. 5 на 3, слѣдовало бы 5 взять слагаемымъ 3 раза, и 5+5+5=15 было бы искомое произведеніе. Итакъ 5.3=15. Но чтобы не прибѣгать при умноженіи однозначныхъ чиселъ всякій разъ къ сложенію, слѣдуетъ знать наизусть произведенія всѣхъ однозначныхъ чиселъ попарно. Всѣ такія произведенія помѣщаются въ *таблицѣ умноженія*. Вотъ она:

2.2= 4	2.6=12	3.2= 6	3.6=18
2.3= 6	2.7=14	3.3= 9	3.7=21
2.4= 8	2.8=16	3.4=12	3.8=24
2.5=10	2.9=18	3.5=15	3.9=27



4.[illegible]	5.[illegible]	7.[illegible]	[illegible]
4.5=12	5.7=35	7.3=21	[illegible]
4.4=16	5.8=40	7.4=28	8.[illegible]=64
4.5=30	5.9=45	7.6=36	8.9=72
4.8=34	—	7.6=43	—
4.7=38	6.3=13	7.7=49	9.3=18
4.8=33	6.3=18	7.8=33	9.3=27
4.9=36	6.4=34	7.6=30	0.4=36
—	6.5=30	—	9.5=43
5.3=10	6.6=36	8.2=16	9.6=54
5.8=15	6.7=43	8.3=24	9.7=43
5.4=20	6.8=48	8.4=32	9.8=73
5.5=35	6.6=54	8.5=49	9.9=91

41. Таблица Пиѳагора. Таблицу умноженія представляютъ еще въ нижеслѣдующемъ видѣ и называютъ ее тогда номинальной таблицею, по имени греческаго философа Пиѳагора (жившаго за 600 л. до Р. Х.), которому приписывается ея изобрѣтеніе.

Горизонтальное направленіе.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
9	6	9	12	15	18	21	24	97
4	8	12	16	20	24	28	33	36
5	10	15	20	25	20	35	40	45
6	12	18	24	90	36	42	45	54
7	14	21	28	35	42	49	56	56
8	16	24	32	40	45	56	64	72
9	18	27	36	45	54	90	72	81

Вертикальное направленіе.

Таблица эта составляется слѣдующимъ образомъ.

Въ первой горизонтальной строкѣ пишутъ первые 9 чиселъ.

Вторая строка содержитъ произведенія девяти первыхъ чиселъ на 2. Третья строка содержитъ произведенія девяти первыхъ чиселъ на 3 и т. д.; вообще *числа всякой горизонтальной строки суть* про-

произведенія данныхъ первыхъ чиселъ на число, стоящее въ первой лѣвой строкѣ. Поэтому, если хотятъ найти напр. произведеніе 8 на 5, то множимое 8 ищутъ въ первой горизонтальной строкѣ и смотрятъ, гдѣ вертикальная строка, начинающаяся 8-ю, пересѣкаетъ горизонтальную, начинающуюся 5-ю. Число 40, стоящее въ этомъ мѣстѣ, и будетъ=8.5.

42. Умноженіе многозначнаго числа на однозначное. Пусть дано умножить 584 на 7. Это значитъ, что число 584 слѣдуетъ взять слагаемымъ 7 разъ; слѣд. по правиламъ сложенія надо было бы писать 7 разъ число 584 и складывать сначала 4 единицы, написанныя 7 разъ, потомъ 8 десятковъ и наконецъ 5 сотенъ; или, замѣняя сложеніе умноженіемъ, умножить на 7 сначала единицы, потомъ десятки и наконецъ сотни. Поэтому мы напишемъ множимое 584, подъ нимъ множителя 7, подъ множителемъ проведемъ черту.

$$\begin{array}{r} 584 \\ \times 7 \\ \hline 4088 \end{array}$$

Потомъ говоримъ: 4 единицы, умноженныя на 7, даютъ 28 единицъ; восемь единицъ напишемъ подъ единицами, а два десятка удержимъ на время въ умѣ.

8 десятковъ, умноженные на 7, даютъ 56 десятковъ, да еще 2 десятка, удержанные въ умѣ, всего 58 десятковъ; 8 десятковъ напишемъ подъ десятками, а 5 сотенъ оставимъ въ умѣ. Наконецъ 5 сотенъ, умноженныя на 7, даютъ 35 сотенъ, что вмѣстѣ съ 5-ю сотнями, оставленными въ умѣ, составитъ 40 сотенъ. Число это пишемъ сполна подъ сотнями. Произведеніе будетъ 4088.

При производствѣ дѣйствія, для сокращенія говорятъ просто: семью 4=28, 8 пишемъ, 2 въ умѣ; семью 8=56, да 2=58; 8 пишемъ, а 5 въ умѣ; семью 5=35, да 5=40; это число пишемъ сполна. Произведеніе будетъ 4088.

Дѣйствіе начинается съ правой руки именно потому, что приходится нѣкоторыя цыфры оставлять на время въ умѣ и прикладывать ихъ къ произведенію цыфры слѣдующаго высшаго разряда на цыфру множителя.

Итакъ, *чтобы умножить многозначное число на однозначное, надо умножить на множителя послѣдовательно всѣ цыфры множимаго, начиная справа. Если произведеніе цыфры множимаго на множителя не превышаетъ 9, то все полученное произведеніе пишутъ, какъ оно есть; если же произведеніе это будетъ болѣе 9-и, то пишутъ только его единицы, а десятки прикладываютъ къ произведенію слѣдующей цыфры множимаго на множителя.*

43. Умноженіе на числа 10, 100, 1000, вообще на единицу съ нулями. Пусть надо умножить число 3275 на 10. Это значитъ, что 3275 надо взять слагаемымъ 10 разъ, или увеличить

его въ 10 разъ; а для этого нужно только съ правой стороны числа поставить нуль, т. е. написать 32750; тогда значеніе каждой цыфры числа увеличится въ 10 разъ (такъ 5 будетъ означать десятки, а не единицы; 7 — сотни, а не десятки и т. д.); слѣд. все число увеличится въ 10 разъ.

Чтобы умножить число 3275 на 100, или увеличить его въ 100 разъ, надо приписать къ нему съ правой руки два нуля; тогда значеніе каждой цыфры увеличится во 100 разъ, а слѣд и все число увеличится во 100 разъ. Точно такъ же найдемъ. что 3275.1000=3275000; 3275.100000=327500000 и т. д. Итакъ *чтобы умножить число на 10, 100, 1000..., надо приписать къ нему справа одинъ, два, три... нулей.*

44. Умноженіе на число, обозначаемое какой-нибудь цыфрой съ нулями. Положимъ, что нужно 465 умножить на 30. Это значитъ 465 взять слагаемымъ 30 разъ; поэтому надо бы написать 30 чиселъ, равеыхъ 465, и сложить ихъ.. Но всѣ эти слагаемыя можно разбить на группы, по 3 числа въ каждой группѣ:

465	465	1-я группа
465	465	
465	465	
465		
465	465	2-я группа
465	465	
465	465	
465		
	465	3-я группа
....	465	
....	465	
		

Такихъ группъ выйдетъ 10; такъ какъ въ каждой группѣ 3 одинакихъ числа, то сумма чиселъ каждой группы будетъ представлять произведеніе числа 465 на 3, т. е. она будетъ равна 1395. Такъ какъ всѣхъ группъ 10, то для нахожденія суммы всѣхъ 30 чиселъ, надо сумму чиселъ каждой группы, т. е. число 1395, взять слагаемымъ 10 разъ, т. е. умножить его на 10; а для этого нужно къ числу 1395 приписать съ правой стороны нуль; получимъ 13950. Итакъ, 465×30=13950.

Подобнымъ образомъ, чтобъ умножить 4724 на 5000, надо 4724 умножить на 5 и къ произведенію 23620 приписать 3 нуля; получимъ 4724.5000=23620000, и т. под. Вообще, *при умноженіи на число, обозначаемое какой-нибудь цыфрой съ нулями, должно множимое умножить на эту цыфру и къ произведенію приписать справа столько нулей, сколько ихъ находится во множителѣ.*

45. Умноженіе многозначныхъ чиселъ. Положимъ, что надо умножать 3275 на 537. Подвишемъ множителя подъ множимымъ и проведемъ горизонтальную черту.

```
   3275
  ×537
 ------
  22925
  98250
1637500
-------
1758675
```

Умножить 3275 на 537 значитъ взять 3275 слагаемымъ 537 разъ; а для этого можно взять его слагаемымъ сперва 7 разъ, потомъ еще 30 разъ и наконецъ 500 разъ, и полученныя суммы сложить между собою; иначе говоря—можно 3275 умножить сперва на 7, потомъ на 30, наконецъ на 500, и полученныя произведенія сложить.

Умноживъ 3275 на 7, получимъ произведеніе 22925, которое и напишемъ подъ чертою.

Теперь 3275 надо умножить на 30; а для этого 3275 умножимъ на 3 и къ полученному произведенію 9825 припишемъ справа нуль; получимъ 98250; это число и напишемъ подъ произведеніемъ множимаго на 7. Чтобы 3275 умножить на 500, множимъ 3275 на 5 и къ полученному произведенію 16375 приписываемъ 2 нуля; получимъ 1637500; число это и напишемъ подъ произведеніемъ множимаго на 30.

Отдѣльныя произведенія множимаго на единицы, десятки, сотни множителя наз. *частными произведеніями*; сложивъ ихъ, получимъ искомое произведеніе данныхъ чиселъ 1758675.

Итакъ, первое частное произведеніе получится, когда мы умножимъ все множимое на первую цыфру множителя 7. Второе частное произведеніе найдется, когда мы умножимъ множимое на вторую цыфру множителя 3 и къ полученному произведенію 9825 припишемъ съ правой стороны нуль; но можно и не писать этого нуля, написавши число 9825 такъ, чтобы первая его цыфра 5 стояла подъ десятками перваго частнаго произведенія, или подъ второю цыфрою множителя.

```
   3275
  ×537
 ------
  22925
  9825
16375
-------
1758675
```

Третье частное произведеніе найдется, когда мы умножимъ множимое на третью цыфру множителя 5 и къ полученному произведенію 16375 припишемъ съ правой стороны два нуля, но можно и не писать этихъ нулей, подписавъ число 16375 такъ, чтобы первая цыфра его стояла подъ сотнями перваго частнаго произведенія, или подъ третьей цыфрой множителя. Вообще слѣд., чтобы не писать нулей, надо первую цыфру каждаго частнаго произведенія писать

подъ той цыфрой множителя, отъ которой получилось это произведеніе. Итакъ, *чтобы умножить многозначное число на многозначное, пишутъ множимое, подъ нимъ множителя и проводятъ горизонтальную черту. Потомъ умножаютъ множимое последовательно на каждую цыфру множителя и получаемыя частныя произведенія пишутъ подъ чертою такъ, чтобы первая цыфра каждаго частнаго произведенія стояла подъ той цыфрой множителя, на которую умножали. Подъ последнимъ частнымъ произведеніемъ проводятъ черту и складываютъ ихъ всѣ. Полученная сумма и будетъ искомое произведеніе данныхъ чиселъ.*

46. При умноженіи множимаго на каждую отдѣльную цыфру множителя удобнѣе, какъ мы видѣли, умножать цыфры множимаго отъ правой руки къ лѣвой; цыфры же множителя можно брать въ какомъ угодно порядкѣ, лишь бы обращено было вниманіе на мѣсто, которое должна занимать первая цыфра получаемаго частнаго произведенія. Впрочемъ, для однообразія и цыфры множителя берутъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ стоятъ отъ правой руки къ лѣвой.

47. Если нѣкоторыя изъ цыфръ множителя будутъ нули, то при умноженіи ихъ пропускаютъ, а умножаютъ только на значащія цыфры множителя, наблюдая при этомъ, чтобы первая цыфра каждаго частнаго произведенія стояла подъ той цыфрой множителя, отъ которой было получено это частное произведеніе. Напр.

```
       520128
      ×40306
      -------
      3120768
    1560384
  2080512
  -----------
  20964279168
```

Здѣсь единицы второго частнаго произведенія поставлены подъ третьей цыфрой множителя, такъ какъ вторая цыфра множителя есть нуль; единицы третьяго частнаго произведенія поставлены подъ пятой цыфрой множителя.

48. Умноженіе чиселъ, оканчивающихся нулями. Пусть дано умножить 21600 на 23. Если бы требовалось умножить 216 единицъ на 23, то получили бы 4968; но такъ какъ нужно умножить 216 сотенъ, то получимъ 4968 *сотенъ*, т. е. 496800.

Пусть требуется еще умножить 21600 на 230. Множитель равенъ 23, умноженнымъ на 10; слѣд. мы умножимъ 21600 на 230, если умножимъ сначала на 23, при чемъ получимъ 496800, и этотъ результатъ умножимъ на 10, что даетъ 4968000. Итакъ, *если множимое или множитель, или оба вмѣстѣ оканчиваются нулями, то числа умножаютъ, не обращая вниманія на нули; а къ произведенію приписываютъ справа столько нулей, сколько ихъ было на концѣ во множимомъ и во множителѣ.*

49. **Число цыфръ произведенія.** Пусть дано умножить 25674 на 387; множитель меньше 1000, но больше 100; слѣд. произведеніе 25674 на 387 меньше 25674 . 1000 и больше 25674 . 100; иначе говоря, оно содержится между 25674000 и 2567400, т. е. произведеніе должно имѣть или 8, или 7 цыфръ; и дѣйствительно, перемноживъ данныя числа, получимъ 9935838, число семизначное. Вообще, *въ произведеніи получается столько цыфръ, сколько ихъ во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ, или одной цыфрой меньше.*

50. Если множитель есть 9,99,999,9999..., то умноженіе допускаетъ значительное упрощеніе. Напр. чтобъ умножить 483 на 999, умножимъ 483 на 1000, получимъ 483000; но какъ при этомъ мы взяли 483 лишній разъ слагаемымъ, то изъ 483000 вычтемъ 483; найдемъ 483.999=482517.

Подобнымъ образомъ 258.99999 = 25800000—258=25799742; и вообще, чтобъ умножить какое-нибудь число на число, состоящее изъ цыфры 9, повторенной нѣсколько разъ, надо умножить данное число на 1 со столькими нулями, сколько разъ цыфра 9 входила во множителя, и отъ полученнаго произведенія отнять множимое.

51. *Произведеніе двухъ чиселъ не измѣнится, если перемѣнимъ порядокъ производителей*; т. е. результатъ остается одинъ и тотъ же, будемъ ли мы считать первое число множимымъ, а второе множителемъ, или наоборотъ второе множимымъ, а первое множителемъ. Такъ 5.3=3.5. Въ самомъ дѣлѣ, 5 умножить на 3 значитъ 5 взять слагаемымъ 3 раза; а такъ какъ число 5 состоитъ изъ единицы, сложенной 5 разъ, то мы имѣемъ:

$$\begin{array}{r} 5=1+1+1+1+1 \\ 5=1+1+1+1+1 \\ 5=1+1+1+1+1 \\ \hline 5+5+5=3+3+3+3+3 \end{array}$$

Складывая числа, стоящія въ каждомъ вертикальномъ столбцѣ, получимъ 5+5+5=3+3+3+3+3; или 5, взятое слагаемымъ 3 раза, равно 3, повтореннымъ слагаемымъ 5 разъ; т. е. 5.3=3.5.

52. **Повѣрка умноженія.** На предыдущемъ свойствѣ произведенія основана повѣрка умноженія: *чтобы узнать, вѣрно ли сдѣлано умноженіе, данныя числа умножаютъ вновь, измѣнивши порядокъ производителей;* т. е. при вторичномъ умноженіи дѣлаютъ множителемъ прежнее множимое, а множимымъ прежняго множителя. Если не было сдѣлано ошибки, то произведеніе должно быть одинаково въ обоихъ случаяхъ.

53. *Произведеніемъ нѣсколькихъ производителей* наз. число, которое получится, если умножить перваго производителя на второго, потомъ полученное произведеніе на третьяго и т. д. Напр. произведеніе 4.5.3.2 есть число, которое получимъ, если умножимъ 4 на 5, полученное произведеніе 20 умножимъ на 3 и новое произведеніе 60 умножимъ на 2; найдемъ, что 4.5.3.2=120.

54. Чтобы доказать вообще, что произведеніе сколькихъ угодно производителей не измѣняется отъ перемѣны порядка ихъ, докажемъ сначала, что *въ произведеніи нѣсколькихъ производителей можно перемѣнить мѣста послѣднихъ двухъ производителей, не измѣняя самаго произведенія.* Докажемъ напр., что 5.3.4.2=5.3.2.4.

Порядокъ первыхъ двухъ производителей одинаковъ въ обѣихъ частяхъ равенства; поэтому произведеніе ихъ будетъ одинаково и въ первой, и во второй части равенства; обозначимъ его черезъ P и докажемъ, что P.4.2=P.2.4.

Напишемъ въ горизонтальной строкѣ P слагаемымъ четыре раза и такихъ строкъ напишемъ 2, т. е. P+P+P+P
P+P+P+P

Сумма чиселъ каждой строки будетъ P.4; а такъ какъ строкъ 2, то сумма всѣхъ написанныхъ чиселъ будетъ P.4.2. Но складывая числа, стоящія въ каждомъ вертикальномъ столбцѣ, найдемъ, что сумма чиселъ каждаго столбца есть P.2; а какъ столбцовъ всѣхъ 4, то сумма всѣхъ написанныхъ чиселъ есть P.2.4. Слѣд. P.4.2=P.2.4, или 5.3.4.2.=5.3.2.4.

Теперь не трудно доказать, что *въ произведеніи нѣсколькихъ производителей можно измѣнять какъ угодно порядокъ производителей, не измѣняя самаго произведенія.* Возьмемъ напр. 2.3.4.5.6.7.

По предыдущему можно перемѣнить мѣста двухъ послѣднихъ производителей, т. е. можно написать 2.3.4.5.7.6. Въ этомъ произведеніи предпослѣдняго производителя 7 можно поставить на мѣсто 5, *а* 5 на мѣсто 7. Въ самомъ дѣлѣ, отбросивъ на время послѣдняго производителя 6, имѣемъ 2.3.4.5.7=2.3.4.7.5; а умноживъ оба произведенія на 6, получимъ
2.3.4.5.7.6=2.3.4.7.5.6 и слѣд. 2.3.4.5.6.7=2.3.4.7.5.6.

Итакъ послѣдній производитель 7 занимаетъ теперь третье мѣсто отъ конца. Разсуждая подобнымъ образомъ, можно передвинуть его наконецъ на второе мѣсто, т. е. 2.3.4.5.6.7=2.7.3.4.5.6.

А такъ какъ 2.7=7.2, то умножая обѣ части этого послѣдняго равенства на 3.4.5.6, будемъ имѣть
2.7.3.4.5.6=7.2.3.4.5.6, и слѣд. 2.3.4.5.6.7=7.2.3.4.5.6, т. е. послѣдній производитель 7 можетъ занимать какое угодно мѣсто во взятомъ произведеніи, и произведеніе при этомъ не мѣняется. Такое же разсужденіе можно приложить къ каждому производителю, и слѣд. произведеніе сколькихъ угодно множителей не измѣняется отъ перемѣны ихъ порядка.

55. Степень. Произведеніе равныхъ производителей наз. *степенью.* Такъ 3, 3.3, 3.3.3, 3.3.3.3 суть различныя степени числа 3. Одинъ производитель 3, взятый отдѣльно, есть *первая степень* 3-хъ.

Произведеніе двухъ производителей, равныхъ 3, т. е. 3.3, наз. *второю степенью* 3-хъ или *квадратомъ* 3-хъ.

Произведеніе трехъ производителей, равныхъ 3, т. е. 3.3.3, наз. *третьей степенью* 3-хъ или *кубомъ* 3-хъ.

Произведеніе четырехъ производителей, равныхъ 3, т. е. 3.3.3.3, наз. *четвертою степенью* 3-хъ, и т. д.

Для сокращенія письма, степени обозначаются не такъ, какъ мы писали, а иначе; именно, число пишутъ одинъ разъ, а надъ нимъ вверху съ правой стороны ставятъ цыфру, показывающую, сколько разъ число должно быть взято производителемъ, или, какъ говорятъ, показывающую, въ какой степени входитъ данное число. Такъ квадратъ 3-хъ, или 3.3, пишется такъ: 3^2; кубъ 3-хъ, или 3.3.3, изображается 3^3; четвертая степень 3-хъ, т. е. $3.3.3.3 = 3^4$; $3.3.3.3.3 = 3^5$ и т. д. Обратно—3^2 читается такъ: квадратъ 3-хъ или 3 въ квадратѣ; 3^3—кубъ 3-хъ или 3 въ кубѣ; 3^4—3 въ четвертой степени, 3^7—3 въ седьмой степени и т. д.

Числа 2, 3, 4, стоящія вверху надъ числомъ 3 и показывающія, сколько разъ это число должно быть взято производителемъ, наз. *показателями степеней*.

56. Рѣшимъ нѣсколько задачъ, въ которыхъ вопросъ приводитъ къ составленію новаго числа изъ данныхъ посредствомъ умноженія.

1) Я имѣю 250 рублей, а братъ мой въ 7 разъ больше, чѣмъ я; сколько денегъ у моего брата?

Чтобы найти число, въ 7 разъ большее 250 руб., или такое число, въ которомъ 250 руб. содержалось бы 7 разъ, надо 250 руб. повторить слагаемымъ 7 разъ, иначе 250 руб. умножить на 7; получимъ 1750. Итакъ, братъ мой имѣетъ 1750 рублей.

2) Куплено 215 стопъ бумаги по 5 руб. за каждую; сколько надо заплатить за все?

За каждую стопу заплачено 5 руб., и чтобы узнать, сколько заплачено за 215 стопъ, надо 5 руб. взять слагаемымъ 215 разъ, т. е. 5 рублей умножить на 215; получимъ 1075 руб.

3) На рубль можно купить 20 фунтовъ муки; сколько можно купить муки на 18 руб.?

На 18 руб. можно купить въ 18 разъ больше, чѣмъ на 1 рубль; слѣд. 20 надо увеличить въ 18 разъ, или 20 умножить на 18; получимъ 360; слѣд. на 18 руб. можно купить 360 фун. муки.

57. Изъ предыдущего слѣдуетъ, что *умноженіе употребляется при рѣшеніи задачъ тогда, когда вопросъ приводитъ къ тому, чтобы найти* число, *которое было бы больше даннаго въ нѣсколько разъ*, или *къ тому*, чтобы *найти цѣну нѣсколькихъ одинакихъ предметовъ, зная цѣну одного*, или *когда приходится найти, сколько предметовъ можно получить на данную сумму денегъ, зная, сколько ихъ можно получить на какую-нибудь единицу денегъ* (напр. на рубль, копѣйку и т. под.).

Во всѣхъ этихъ случаяхъ весьма простое разсужденіе показываетъ, какое изъ двухъ данныхъ чиселъ должно быть взято множимымъ. Замѣтимъ, что *множитель есть всегда число отвлеченное*, такъ какъ онъ показываетъ, *сколько разъ* число должно быть взято слагаемымъ; а *произведеніе должно быть однородно съ множимымъ*, ибо произведеніе есть сумма, а множимое есть слагаемое, повтори-

емое нѣсколько разъ; сумма же всегда однородна съ слагаемымъ. При производствѣ же самаго дѣйствія числа умножаютъ, какъ будто бы они были отвлеченныя, и только въ произведеніи ставятъ названіе той единицы, въ которой было выражено число, взятое множимымъ.

58. Вопросы. 1) Что значитъ умножить одно число на другое? 2) Какъ наз. числа, данныя для умноженія, и число, которое получается при этомъ дѣйствіи? 3) Какъ пишется знакъ умноженія? гдѣ онъ ставится? 4) Что такое таблица умноженія? 5) Какъ составлена таблица Пиѳагора? 6) Какъ дѣлается умноженіе многозначнаго числа на однозначное? 7) Какъ умножить число на 10, 100, 1000...., вообще на число, обозначаемое единицей съ нулями? 8) Какъ умножить на число, обозначаемое какой-нибудь цыфрой съ нулями? 9) Какъ дѣлается умноженіе многозначнаго числа на многозначное? 10) Почему при умноженіи дѣйствіе начинается съ правой руки? 11) Можно ли начинать умноженіе съ лѣвой руки? 12) Какъ дѣлаютъ умноженіе въ тѣхъ случаяхъ, когда во множителѣ между значащими цыфрами находятся нули? 13) Какъ дѣлается умноженіе, когда одинъ или оба производителя оканчиваются нулями? 14) Какъ умножить какое-нибудь число на 9,99,999...? 15) Доказать, что произведеніе двухъ производителей не мѣняется отъ перемѣны порядка ихъ? 16) Какъ повѣрить умноженіе? 17) Показать, что множитель есть всегда число отвлеченное, а произведеніе однородно съ множимымъ? 18) Какъ увеличить какое-нибудь число въ нѣсколько разъ? 19) Какія задачи рѣшаются посредствомъ умноженія? 20) Все ли равно—увеличить число шестью или въ 6 разъ? 21) Составить нѣсколько задачъ на умноженіе?

ДѢЛЕНІЕ.

59. Сколько аршинъ сукна можно купить на 20 рублей, если аршинъ стоитъ 5 руб.?

Рѣшить этотъ вопросъ можно такимъ образомъ: возьмемъ изъ 20 руб. 5 рублей и отложимъ ихъ; на эти 5 рублей можно купить одинъ аршинъ сукна. Отъ 20 руб. останется 15 руб.; изъ нихъ снова возьмемъ 5 руб. и отложимъ — на эти деньги можно купить еще одинъ аршинъ сукна. Изъ оставшихся 10 руб. снова отложимъ 5 руб.; на нихъ можно купить еще аршинъ сукна. Денегъ осталось только 5 руб., отложимъ и ихъ, такъ какъ на нихъ можно купить еще аршинъ сукна. Отъ 20 руб. не останется тогда ничего. Сосчитаемъ теперь, сколько разъ мы откладывали по 5 руб.; видимъ, что 4 раза; за каждый аршинъ надо заплатить 5 руб., слѣд. сколько разъ изъ 20 рублей мы отложили по 5 рублей, столько аршинъ сукна можно купить на 20 рублей, т. е. 4 аршина. Итакъ, вопросъ рѣшается послѣдовательнымъ вычитаніемъ 5 руб. изъ 20 руб. Чтобы найти неизвѣстное число аршинъ, надо было узнать, сколько разъ 5 руб. можно отнять отъ 20 руб.; другими словами—узнать, *сколько разъ 5 рублей содержится въ 20 руб.*

ляхъ. Въ данномъ примѣрѣ и вычитать было не трудно, и сосчитать, сколько было сдѣлано послѣдовательныхъ вычитаній, также не долго и не трудно. Но если бы требовалось узнать, сколько аршинъ пятирублеваго сукна можно купить на 760 руб.; то надо бы сосчитать, сколько разъ можно отнимать послѣдовательно 5 руб. отъ 760 руб.; а это было бы долго и затруднительно. Для облегченія нужно произвести съ данными числами новое дѣйствіе, наз. *дѣленіемъ*. Итакъ, *дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ двухъ данныхъ чиселъ составляютъ третье, показывающее, сколько разъ одно число содержится въ другомъ*. Большее число, которое должно содержать въ себѣ другое, наз. *дѣлимымъ;* меньшее, которое должно содержаться въ большемъ, наз. *дѣлителемъ*; а число, показывающее, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, наз. *частнымъ*.

Чтобы обозначить, что одно число надо раздѣлить на другое, между ними ставятъ знакъ : или горизонтальную черту —, наверху которой ставятъ дѣлимое, а внизу дѣлителя. Такъ, чтобы показать, что 8 надо раздѣлить на 2, пишутъ 8 : 2 или $\frac{8}{2}$.

60. Пусть надо раздѣлить 42 на 7, т. е. узнать, сколько разъ 7 содержится въ 42. Для этого нужно найти, сколько разъ можно отнять 7 отъ 42; отнять же 7 отъ 42 можно столько разъ, сколько разъ то же самое число 7 надо взять слагаемымъ, чтобы получить 42. Поэтому мы и попробуемъ брать число 7 слагаемымъ два, три и т. д. разъ; или, что все равно, попробуемъ умножать 7 на 2, 3 и т. д., пока не получимъ 42. Пробуя такимъ образомъ, мы найдемъ, что 7 надо умножить на 6, чтобы получить 42; слѣд. и 7 отъ 42-хъ можно отнять послѣдовательно 6 разъ; значитъ 7 содержится въ 42-хъ шесть разъ; а потому частное отъ дѣленія 42 на 7 есть 6, или 42 : 7=6.

Если твердо знать таблицу умноженія, то прямо можно сказать, что 7 надо умножить на 6, чтобы получить 42.

Не всегда однако дѣлитель содержится *ровно нѣсколько разъ* въ дѣлимомъ. Такъ пусть дано раздѣлить 48 на 9. Если 9 умножить на 5, то получимъ число 45, меньшее 48; умноживъ же 9 на 6, получимъ 54, число большее 48. Слѣд. 9 заключается въ 48-ми 5 разъ съ лишкомъ. Въ этомъ случаѣ вмѣсто частнаго беремъ меньшее число—5, и такъ какъ 9, умноженное на 5, даетъ 45, т. е. отъ 48 останется еще 3, то говоримъ, что 48 на 9 *не дѣлится безъ остатка*. Самое дѣйствіе располагаютв такъ: сначала пишутъ дѣлимое 48, съ правой стороны его проводитъ вертикальную черту, за которой пишутъ дѣлителя 9. Подъ дѣлителемъ проводитъ горизонтальную черту и подъ нею пишутъ частное.

36138	57		36138	57
34200	600+30+4		842	634
1938			193	
1710			171	
228			228	
228			228	
0			0	

въ 36138 ни нѣсколько *десятковъ тысячъ разъ*, ни даже *нѣсколько тысячъ разъ*, потону что и 57 десятковъ тысячъ и 57 тысячъ будутъ больше дѣлииаго 36138; слѣд. единицы высшаго разряда въ частномъ будутъ сотни, и чтобы найти, сколько *сотенъ разъ* 57 единицъ содержится въ 36138, разсуждаемъ такимъ образомъ: еслибы въ дѣлимомъ было только 57 сотенъ, т. е. 5700, то дѣлитель 57 содержался бы въ этомъ числѣ одну сотню разъ; если бы въ дѣлимомъ было не 57 сотенъ, а вдвое больше, т. е. 114 сотенъ, то дѣлитель 57 содержался бы двѣ сотни разъ; если бы въ дѣлимомъ было сотенъ въ три раза больше 57, то дѣлитель 57 содержался бы трж сотни разъ и т. д.; слѣд. вообще дѣлитель 57 будетъ содержаться столько *сотенъ разъ* въ 361 сотнѣ, сколько разъ 57 содержится въ 361. На единицы и десятки дѣлииаго, т. е. на число 38, мы пока не будемъ обращать вниманія, потому что дѣлитель 57 не содержится въ нихъ ни одной сотни разъ.

Предыдущее разсужденіе приводитъ къ тому, что въ дѣлимомъ надо отдѣлить слѣва число, 361 т. е. столько знаиовъ, чтобы дѣлитель 57 могъ содержаться въ нихъ. Чтобы найти, сколько разъ 57 содержится въ 361, пробуемъ умножать 57 на 1, 2, 3 и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ произведеніе, равное 361 или нѣсколько меньшее. Послѣ нѣсколькихъ пробъ увидимъ, что 57 надо умножить на 6; слѣд. 57 содержится въ 361 шесть разъ; поэтому 57 содержится въ 361 сотнѣ шесть сотенъ разъ; въ частномъ слѣд. надо поставить 600, умножить дѣлителя 57 на 600 и произведеніе 34200 вычесть изъ дѣлимаго 36138.

Но чтобы не писать лишнихъ два нуля въ частномъ и потомъ при умноженіи два нуля подъ дѣлимымъ, мы, узпавъ, что 57 содержится 6 разъ въ 361, поставимъ въ частное только цыфру 6 и, умноживъ на нее 57, произведеніе 342 вычтемъ нзъ 361.

Точна также, для нахожденія десятковъ частнаго пришлось бы узнавать, сколько десятковъ разъ 57 содержится не во всемъ остаткѣ 1938, а только въ 193 десяткахъ; а для этого пришлось бы находить, сколько разъ 57 содержится въ 193. Найдя, сколько разъ 57 содержится въ 193, въ частное слѣдовало бы поставить столько десятковъ и умножить на нихъ дѣлителя; но чтобы избѣгнуть напрасной переписки цыфръ и нулей, мы снесемъ къ полученному при сокращенномъ дѣленіи первому остатку 19 слѣдующую цыфру

дѣлимаго 3 и узнаемъ, сколько разъ 57 содержится въ 193. Для этого пробуемъ умножать 56 на 1, 2, 3 и т. д., пока не получимъ 193 или число, нѣсколько меньшее. Найдя посредствомъ такихъ пробъ, что дѣлителя 57 надо умножить на 3, эту цыфру мы и поставимъ въ частное рядомъ съ найденной уже цыфрой частнаго 6 и умножимъ дѣлителя 57 на 3; произведеніе 171 вычтемъ изъ 193. Къ новому остатку 22 снесемъ слѣдующую цыфру дѣлимаго 8 и, узнавъ, сколько разъ 57 содержится въ 228, найдемъ цыфру единицъ частнаго 4; умноживъ дѣлителя 57 на 4 и вычтя найденное произведеніе изъ 228, получимъ остатокъ 0. Итакъ, частное=634.

64. Вмѣсто того, чтобы узнавать, сколько разъ весь дѣлитель содержится въ отдѣленныхъ цыфрахъ дѣлимаго, можно найти цыфру частнаго гораздо скорѣе, узнавши, сколько разъ первая слѣва цыфра дѣлителя содержится въ одной или двухъ слѣва цыфрахъ числа, отдѣленнаго въ дѣлимомъ; одну цыфру въ этомъ числѣ берутъ тогда, когда въ немъ будетъ столько же цыфръ, сколько ихъ находится въ дѣлителѣ; двѣ—когда число цыфръ, отдѣленныхъ въ дѣлимомъ, будетъ одною больше, чѣмъ число цыфръ дѣлителя.

Такъ, чтобы отыскать въ предыдущемъ примѣрѣ первую цыфру частнаго, мы не будемъ умножать 57 на 1, 2, 3 и т. д., пока не получимъ 361; а узнаемъ, сколько разъ первая слѣва цыфра дѣлителя—5—содержится въ двухъ первыхъ слѣва цыфрахъ числа 361, т. е. въ 36; 5 въ 36 содержится 7 разъ; но написавъ 7 въ частное и умноживъ на 7 дѣлителя 57, получимъ число 399, большее 361; слѣд. цыфра 7 велика; уменьшаемъ ее на 1 и пишемъ въ частное 6. Итакъ, одной пробы достаточно, чтобы найти цыфру частнаго.

Поступая такимъ же образомъ для отысканія второй цыфры частнаго, т. е. узнавая, сколько разъ первая цыфра дѣлителя 5 содержится въ двухъ первыхъ слѣва цыфрахъ остатка 193, т. е. въ 19, мы сразу находимъ вторую цыфру частнаго 3. Сразу же найдемъ и послѣднюю цыфру частнаго 4.

65. Изъ предыдущаго видно, что, отыскивая цыфру частнаго вышепоказаннымъ способомъ, можно иногда взять слишкомъ большую цыфру; поэтому полезно напередъ знать, не будетъ ли взятая цыфра частнаго слишкомъ велика. Если бы это случилось, то пришлось бы умножать на нее дѣлителя понапрасну; а это очень невыгодно, особенно когда дѣлитель будетъ большое число.

Пусть напр. дано раздѣлить 43652 на 7893. Узнавая, сколько разъ 7 содержится въ 43, нашли бы для частнаго цыфру 6. Но, не написавъ еще эту цыфру въ частное, мы можемъ узнать слѣдующимъ образомъ, годится ли она, или нѣтъ. Умножимъ въ умѣ вторую слѣва цыфру дѣлителя, т. е. 8 на 6, получимъ 48, и десятки этого произведенія (т. е. 4) придадимъ къ произведенію первой цыфры дѣлителя 7 на 6, или къ 42; получимъ 46—число, которое

больше первыхъ двухъ цыфръ дѣлимаго. Слѣд. цыфра 6 будетъ велика, потому нужно взять только 5.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ недостаточно умножить въ умѣ на найденную цыфру частнаго *только двѣ* первыхъ цыфры дѣлителя слѣва; надо иногда умножить три, четыре и даже больше цыфръ.

66. При дѣленіи многозначнаго числа на многозначное можно не писать произведеній дѣлителя на различныя цыфры частнаго, а по мѣрѣ полученія цыфръ этихъ произведеній вычитать ихъ изъ соотвѣтствующихъ цыфръ дѣлимаго и писать только одни остатки. Напр. раздѣлимъ 108766 на 457. Отдѣливъ въ дѣлимомъ слѣва такое число, чтобы дѣлитель могъ содержаться въ немъ, т. е. 1087,

```
108766 | 457
 1736  | 238
  3656 |
     0
```

смотримъ, сколько разъ 4 содержится въ 10, и въ частное ставимъ 2; умножаемъ дѣлителя на 2 и вычитаемъ въ то же время произведеніе изъ 1087 слѣдующимъ образомъ: 2-жды 7=14, 4 изъ 7 даетъ 3, что и ставимъ подъ 7, а 1 оставляемъ въ умѣ; 2-жды 5=10 да 1, удержанная въ умѣ,=11; 1 вычитаемъ изъ 8-и, получимъ семь, что и пишемъ подъ 8, а 1 удерживаемъ въ умѣ. Наконецъ 2-жды 4=8 да 1, удержанная въ умѣ,=9; вычитая изъ 10, остатокъ 1 пишемъ подъ 0.

Къ остатку 173 сносимъ слѣдующую цыфру дѣлимаго 6, и чтобы найти вторую цыфру частнаго, узнаемъ, сколько разъ 4 содержится въ 17; 4 въ 17 содержится 4 раза; но, не написавъ 4 въ частное, попробуемъ, годится ли эта цыфра. Для этого умножимъ въ умѣ 45 на 4; такъ какъ произведеніе 180 будетъ болѣе 173, то цыфра 4 велика, и въ частномъ поэтому ставимъ 3. Умножаемъ теперь дѣлителя на 3 и цыфры получаемаго произведенія послѣдовательно вычитаемъ изъ 1736; 3-жды 7=21, 1 вычитаемъ изъ первой цыфры остатка справа, т. е. изъ 6; разность 5 пишемъ подъ 6, а 2 пока удерживаемъ въ умѣ; 3-жды 5=15, да 2, что было въ умѣ, =17; 1 удерживаемъ въ умѣ, а 7 вычитаемъ изъ 13, разность 6 пишемъ подъ 3; 3-жды 4=12, да 1, что была въ умѣ=13; 13 изъ 16-и три.

Къ новому остатку 365 сносимъ слѣдующую цыфру дѣлимаго 6; найдя цыфру частнаго 8, умножаемъ цыфры дѣлителя на 8 и вычитаемъ послѣдовательно цыфры этого произведенія изъ числа 3656; получаемъ остатокъ 0. Частное будетъ 238.

67. Число цыфръ частнаго всегда будетъ одной больше, чѣмъ число цыфръ дѣлимаго, оставшихся послѣ отдѣленія въ немъ съ лѣвой стороны числа, нужнаго для отысканія первой цыфры частнаго. Такъ въ предыдущемъ примѣрѣ, послѣ отдѣленія съ лѣвой

стороны дѣлимаго четырехъ цыфръ, осталось еще двѣ; частное же имѣетъ 3 цыфры.

Чтобы не оставалось никакого сомнѣнія на этотъ счетъ, надо доказать, что при снесеніи каждой новой цыфры дѣлимаго получается только одна цыфра частнаго. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что если въ дѣлимомъ отдѣлено столько цыфръ, сколько ихъ есть въ дѣлителѣ, то въ частномъ сначала получится только одна цыфра. Если же отдѣлено одной цыфрой больше, то число, состоящее изъ отдѣленныхъ цыфръ безъ послѣдней, будетъ меньше дѣлителя; другими словами — дѣлимое будетъ содержать меньше десятковъ, чѣмъ дѣлитель единицъ, и слѣд. будетъ меньше десятерняго дѣлителя; поэтому первая цыфра частнаго будетъ меньше 10. Что касается слѣдующихъ цыфръ частнаго, то легко убѣдиться въ томъ, что каковъ бы ни былъ остатокъ, по снесеніи къ нему цыфры дѣлимаго, всегда получится число, меньшее десятернаго дѣлителя. Дѣйствительно, самый большой остатокъ долженъ быть все-таки хотя одной единицей меньше дѣлителя; напр. если дѣлитель былъ 264, то остатокъ не можетъ быть болѣе 263; если къ этому числу снесемъ цыфру дѣлимаго, то полученное число будетъ состоять изъ 263 десятковъ и нѣсколькихъ единицъ, которыхъ однако будетъ меньше 10; слѣд. все число будетъ меньше 264 десятковъ, или меньше дѣлителя, умноженнаго на 10. Итакъ цыфра частнаго будетъ также меньше 10.

68. Если дѣлимое и дѣлитель оба оканчиваются нулями, то дѣленіе можно упростить. Пусть напр. надо раздѣлить 370000 на 45000. Такъ какъ 45 *тысячъ* содержатся въ 370 *тысячахъ* столько же разъ, сколько 45 *единицъ* содержатся въ 370 *единицахъ*, то мы отбросимъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ по три нуля и раздѣлимъ только 370 на 45. При этомъ получимъ частное 8 и остатокъ 10. Но какъ намъ надо было раздѣлить не единицы, а тысячи, то остатокъ 10

$$\begin{array}{r|l} 370000 & 45000 \\ \hline 10000 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 370 & 45 \\ \hline 10 & 8 \\ \hline 10000 & \end{array}$$

долженъ изображать не 10 единицъ, а 10 тысячъ, и потому съ правой стороны къ нему должно приписать 3 нуля, т. е. столько, сколько мы отбросили въ дѣлимомъ.

Итакъ, *если дѣлимое и дѣлитель оба оканчиваются нулями, то зачеркиваютъ* въ *обоихъ справа по равному числу нулей и приписываютъ къ полученному остатку столько нулей, сколько было зачеркнуто* въ *дѣлимомъ.*

69. Подобное же упрощеніе представляется и въ томъ случаѣ, когда одинъ дѣлитель оканчивается нулями. Такъ пусть дано раздѣлить 372645 на 45000. Такъ какъ 45 тысячъ не могутъ содержаться въ единицахъ, десяткахъ и сотняхъ дѣлимаго, т. е. въ числѣ 645, ни разу, а только въ 372 тысячахъ, то мы можемъ разложить дѣлимое 372645 на двѣ части 372000+645 и узнать, сколько разъ 45 тысячъ содержатся въ 372 тысячахъ. А для этого, по предыдущему, надо раздѣлить 372 на 45, къ полученному остатку 12

```
372645 |45            372645 |45000
 12000 | 8             12645 |8
   645
 12645
```

приписать 3 нуля и придать еще 645, т. е. вмѣсто 3-хъ нулей прямо приписать отброшенное число 645. Итакъ, *если одинъ только дѣлитель оканчивается нулями, то въ дѣлителѣ зачеркиваютъ нули, а въ дѣлимомъ отъ правой руки къ лѣвой отдѣляютъ столько цыфръ, сколько нулей зачеркнуто въ дѣлителѣ, и приписываютъ эти цыфры справа къ полученному послѣ дѣленія остатку.*

70. Еще легче раздѣлить число на 10, 100, 1000...., вообще на единицу съ нулями. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что дано 54672 раздѣлить на 1000. Сдѣлавъ дѣленіе, найдемъ въ частномъ 54, а въ остаткѣ 672.

Точно также 54672 : 100=546 съ остаткомъ 72.

32083 : 10=3208 съ остаткомъ 3 и т. под.

Въ первомъ примѣрѣ остатокъ 672 составляютъ три первыя цыфры дѣлимаго, считая справа, а частное 54 остальныя цыфры; а такъ какъ въ дѣлителѣ три нуля, то можно сказать, что остатокъ 672 составляютъ столько первыхъ цыфръ дѣлимаго, считая справа, сколько нулей въ дѣлителѣ, а частное—остальныя цыфры дѣлимаго. Точно также отъ дѣленія 54672 на 100 получаемъ въ остаткѣ число 72, состоящее изъ первыхъ двухъ цыфръ дѣлимаго, а въ частномъ остальныя его цыфры. Слѣд. *чтобы раздѣлить число на единицу съ нулями, должно отдѣлить занятою въ дѣлимомъ съ правой руки столько цыфръ, сколько нулей въ дѣлителѣ; эти цыфры и составятъ остатокъ, а остальныя цыфры дѣлимаго составятъ частное;* такъ 765384 : 10000=76 съ остаткомъ 5384; 3206 : 10=320 съ остаткомъ 6, и т. под.

71. Сложеніе, вычитаніе и умноженіе начинаютъ съ правой руки, а дѣленіе съ лѣвой; причина этого заключается: во-первыхъ, въ томъ, что гораздо скорѣе можно узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, начавъ съ единицъ высшихъ разрядовъ; а во-вторыхъ въ томъ, что если дѣлитель не содержится ровно нѣсколько разъ въ этихъ единицахъ, то остатокъ легко можно обратить въ единицы низшихъ разрядовъ и приложить къ этимъ послѣднимъ. Начавъ же дѣленіе съ правой руки, мы въ большей части случаевъ самымъ ходомъ дѣйствія принуждены будемъ слѣдовать привитому нами прежде порядку. Пусть напр. дано раздѣлить 13824 на 54.

```
13824 | 54
   24 |  0
  824 | 00
 3014 | 15
10044 | 55
    0 |186
      |256
```

дѣлимаго 3 и узнаемъ, сколько разъ 57 содержится въ 193. Для этого пробуемъ умножать 57 на 1, 2, 3 и т. д., пока не получимъ 193 или число, нѣсколько меньшее. Найдя посредствомъ такихъ пробъ, что дѣлителя 57 надо умножить на 3, эту цыфру мы и поставимъ въ частное рядомъ съ найденной уже цыфрой частнаго 6 и умноживъ дѣлителя 57 на 3, произведеніе 171 вычтемъ изъ 193. Къ новому остатку 22 снесемъ слѣдующую цыфру дѣлимаго 8 и, узнавъ, сколько разъ 57 содержится въ 228, найдемъ цыфру единицъ частнаго 4; умноживъ дѣлителя 57 на 4 и вычтя найденное произведеніе изъ 228, получимъ остатокъ 0. Итакъ, частное=634.

64. Вмѣсто того, чтобы узнавать, сколько разъ весь дѣлитель содержится въ отдѣленныхъ цыфрахъ дѣлимаго, можно найти цыфру частнаго гораздо скорѣе, узнавши, сколько разъ первая слѣва цыфра дѣлителя содержится въ одной или двухъ слѣва цыфрахъ числа, отдѣленнаго въ дѣлимомъ; одну цыфру въ этомъ числѣ берутъ тогда, когда въ немъ будетъ столько же цыфръ, сколько ихъ находится въ дѣлителѣ; двѣ — когда число цыфръ, отдѣленныхъ въ дѣлимомъ, будетъ одною больше, чѣмъ число цыфръ дѣлителя.

Такъ, чтобы отыскать въ предыдущемъ примѣрѣ первую цыфру частнаго, мы не будемъ умножать 57 на 1, 2, 3 и т. д., пока не получимъ 361; а узнаемъ, сколько разъ первая слѣва цыфра дѣлителя — 5 — содержится въ двухъ первыхъ слѣва цыфрахъ числа 361, т. е. въ 36; 5 въ 36 содержится 7 разъ; но написавъ 7 въ частное и умноживъ на 7 дѣлителя 57, получимъ число 399, большее 361; слѣд. цифра 7 велика; уменьшаемъ ее на 1 и пишемъ въ частное 6. Итакъ, одной пробы достаточно, чтобы найти цыфру частнаго.

Поступая такимъ же образомъ для отысканія второй цыфры частнаго, т. е. узнавая, сколько разъ первая цыфра дѣлителя 5 содержится въ двухъ первыхъ слѣва цыфрахъ остатка 193, т. е. въ 19, мы сразу находимъ вторую цыфру частнаго 3. Сразу же найдемъ и послѣднюю цыфру частнаго 4.

65. Изъ предыдущаго видно, что, отыскивая цыфру частнаго вышепоказаннымъ способомъ, можно иногда взять слишкомъ большую цифру; поэтому полезно напередъ знать, не будетъ ли взятая цыфра частнаго слишкомъ велика. Если бы это случилось, то пришлось бы умножать на нее дѣлителя понапрасну; а это очень невыгодно, особенно когда дѣлитель будетъ большое число.

Пусть напр. дано раздѣлить 43652 на 7896. Узнавая, сколько разъ 7 содержится въ 43, нашли бы для частнаго цыфру 6. Но, не написавъ еще эту цыфру въ частное, мы можемъ узнать слѣдующимъ образомъ, годится ли она, или нѣтъ. Умножимъ въ умѣ вторую слѣва цыфру дѣлителя, т. е. 8 на 6, получимъ 48, и десятки этого произведенія (т. е. 4) прибавимъ къ произведенію первой цыфры дѣлителя 7 на 6, или къ 42; получимъ 46 — число, которое

6; поэтому на 24 руб. надо смотрѣть какъ на произведеніе, а на 4 руб. и на 6 какъ на производителей. Имѣя произведеніе 24 руб. и котораго-нибудь изъ производителей—4 руб. или 6, можно найти другого производителя: надо только раздѣлить произведеніе на даннаго производителя; слѣд. дѣля 24 руб. на 4 руб., мы должны получить въ частномъ 6; а дѣля 24 руб. на 6, должны получить въ частномъ 4 руб. Обратимъ вниманіе на эти два случая; они существенно разнятся другъ отъ друга. Въ первомъ случаѣ, когда приходится дѣлить 24 руб. на 4 руб., и дѣлимое, и дѣлитель числа именованныя, и, какъ мы уже видѣли, это значитъ узнать, сколько разъ 4 руб. содержатся въ 24 руб. Частное 6, которое показываетъ это, будетъ слѣд. число отвлеченное, и, разсматривая дѣлимое 24 руб. какъ произведеніе, мы должны на частное 6 смотрѣть какъ на множителя (ибо множитель есть всегда число отвлеченное), а на дѣлителя 4 руб. какъ на множимое (ибо множимое и произведеніе всегда однородны между собою).

Во второмъ случаѣ приходится дѣлить 24 руб. на 6, т. е. на отвлеченное число; поэтому теперь мы должны разсматривать дѣлителя 6 какъ множителя, а частное 4 руб. какъ множимое. А такъ какъ множимое есть одно изъ равныхъ шести слагаемыхъ, сумма которыхъ составляетъ 24 руб., то, отыскивая множимое, мы опредѣляемъ каждое такое слагаемое; иначе говоря—опредѣляемъ *шестую часть* 24-хъ рублей, или дѣлимъ 24 руб. на 6 равныхъ частей; каждая такая часть и будетъ 4 рубля. Итакъ, если дѣлитель будетъ число отвлеченное, *то дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно число дѣлится на столько равныхъ частей, сколько единицъ находится въ дѣлителѣ.* Частное, показывающее, какъ велика каждая такая часть, будетъ число именованное, выраженное въ тѣхъ же единицахъ, въ какихъ выражено дѣлимое, потому что часть должна быть однородна съ цѣлымъ.

Такъ какъ шестая часть 24-хъ рублей въ 6 разъ менѣе 24 рублей, то слѣд., дѣля 24 руб. на 6, мы уменьшаемъ 24 руб. въ 6 разъ. Итакъ, *посредствомъ дѣленія можно уменьшить число въ нѣсколько разъ.*

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что при рѣшеніи практическихъ задачъ дѣленіе имѣетъ двоякое значеніе. Если вопросъ приводитъ къ тому, что надо *раздѣлить одно именованное число на другое* (однородное съ нимъ), то это значитъ *узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ; частное въ этомъ случаѣ будетъ число отвлеченное. Если же надо дѣлить именованное число на отвлеченное*, то это значитъ *первое число раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей*, и частное въ этомъ случаѣ, показывая, какъ велика каждая такая часть, будетъ однородно съ дѣлимымъ и слѣд. будетъ число именованное.

74. Такимъ образомъ, *дѣленіе употребляется при рѣшеніи*

такихъ задачъ, когда нужно узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, или во сколько разъ одно число больше или меньше другого, или какую часть одного даннаго числа составляетъ другое данное число, или когда одно число приходится раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей, или уменьшить данное число въ нѣсколько разъ, и т. под. Напр.

1) Изъ 320 пудовъ мѣди вылито 64 одинаковыхъ колокола; сколько вѣсу въ каждомъ колоколѣ? Такъ какъ для этого надо опредѣлить 64-ю часть 320 пуд., то значитъ надо 320 раздѣлить на 64; тогда и найдемъ, что каждый колоколъ вѣситъ 5 пудовъ.

2) Какое число вчетверо меньше 628-ми? Для рѣшенія задачи надо 628 уменьшить въ 4 раза, т. е. раздѣлить на 4; найдемъ 157.

3) Локомотивъ проѣхалъ въ часъ 48 верстъ, а лошадь пробѣжала въ часъ 12 верстъ; во сколько разъ лошадь бѣжала тише локомотива? Раздѣливъ именованное число 48 верстъ на однородное съ нимъ 12 верстъ, получимъ въ частномъ отвлеченное число 4, показывающее, что лошадь шла вчетверо тише локомотива.

75. Вопросы: 1) Что значитъ раздѣлить одно число на другое? 2) Что наз. дѣленіемъ? 3) Какъ наз. числа, данныя для дѣленія, и число, которое получается при этомъ дѣйствіи? 4) Какъ обозначается дѣленіе? 5) Какъ дѣлается дѣленіе, когда дѣлитель есть число однозначное, а дѣлимое число однозначное или двузначное? 6) Какъ узнать, вѣрно ли найдена цыфра часчнаго? 7) Какъ выражается дѣлимое черезъ дѣлителя, частное и остатокъ? 8) Какъ дѣлается дѣленіе многозначнаго числа на однозначное? 9) Какъ дѣлается дѣленіе многозначнаго числа на многозначное? 10) Какъ узнать, сколько цыфръ будетъ въ частномъ? 11) Какъ упростить дѣленіе, когда и дѣлимое, и дѣлитель оканчиваются нулями? 12) Какъ упростить дѣленіе, когда дѣлатель оканчивается нулями? 13) Какъ раздѣлить число на 10, 100, 1000..., вообще на единицу съ нулями? 14) Какъ повѣрить дѣленіе? 15) Какія значенія можетъ имѣть дѣленіе при рѣшеніи практическихъ задачъ? 16) Посредствомъ какого дѣйствія число увеличивается сколькими-нибудь единицами? уменьшается на сколько-нибудь единицъ? увеличивается въ нѣсколько разъ? уменьшается въ нѣсколько разъ? 17) Все ли равно — уменьшить число 5-ю, или въ 5 разъ? 18) Какія задачи рѣшаются посредствомъ дѣленія? 19) Зная дѣлителя, частное, и остатокъ, какъ найти дѣлимое? 20) По данному дѣлимому, частному и остатку найти дѣлителя? 21) Зная дѣлимое, дѣлятеля и частное, какъ найти остатокъ? 22) Какъ по данному произведенію и одному изъ производителей найти другого производителя? 23) Дѣлимое=29, частное=3, остатовъ=5; найти дѣлителя? 24) Дѣлим.=39, дѣлит.=8, част.=4, найти остатокъ? 25) Дѣлит.=9, част.=9, ост.=2; найти дѣлимое? 26) Составить задачу, для рѣшенія которой надо раздѣлить 12 фунтовъ на 4? 12 фунтовъ на 4 фун.?

ИЗМѢНЕНІЯ ПРОИЗВЕДЕНІЯ И ЧАСТНАГО.

76. Измѣненія произведенія. Умножить одно число на другое значитъ первое число взять слагаемымъ столько разъ, сколько во

второмъ находится единицъ; слѣд. произведеніе есть сумма нѣсколькихъ слагаемыхъ, равныхъ множимому. Но сумма увеличивается съ увеличеніемъ слагаемыхъ, слѣд. *произведеніе увеличивается съ увеличеніемъ множимаго*. Равнымъ образомъ, складывая одно и то же слагаемое большее число разъ, мы должны получить сумму большую; слѣд. *произведеніе увеличивается съ увеличеніемъ множителя*. Обратно *произведеніе уменьшается съ уменьшеніемъ котораго-нибудь изъ производителей*. При этомъ, если производители увеличиваются или уменьшаются во *сколько-нибудь разъ*, то между измѣненіемъ ихъ и измѣненіемъ произведенія существуетъ весьма простая зависимость.

Такъ, если множителя оставить безъ перемѣны, а множимое увеличить въ 2, 3 и т. д. разъ, то произведеніе также увеличится въ 2, 3 и т. д. разъ, потому что придется то же самое число разъ брать слагаемымъ число, которое будетъ вдвое, втрое и т. д. больше прежняго.

Если множимое оставить безъ перемѣны, а множителя увеличить въ 2, 3 и т. д. разъ, то произведеніе увеличится во столько же разъ, такъ какъ одно и то же число придется брать слагаемымъ вдвое, втрое и т. д. больше разъ.

Для уясненія всѣхъ этихъ измѣненій, возьмемъ примѣръ: сколько денегъ должно раздать шестерымъ нищимъ, если каждому будетъ дано по 4 коп.? Чтобы найти это, надо 4 умножить на 6; слѣд. всѣ нищіе получатъ 4 . 6=24 коп.

Если бы каждому нищему дали *вдвое больше* прежняго, т. е. 8 коп., то всѣмъ шестерымъ пришлось бы раздать 8.6=48 коп., т. е. также *вдвое больше* прежняго. Если бы нищихъ было *вдвое больше*, т. е. не 6, а 12, то давая каждому по 4 коп., всѣмъ пришлось бы раздать 4.12=48 коп., т. е. опять *вдвое больше* прежняго.

Наоборотъ, если бы каждому нищему дали по 2 коп., т. е. *вдвое меньше* прежняго, то всѣмъ шестерымъ пришлось бы раздать 2.6=12 коп., т. е. также *вдвое меньше* прежняго. Если бы нищихъ было не шестеро, а *вдвое меньше*, т. е. 3, то, давая каждому по 4 коп., пришлось бы раздать всѣмъ вмѣстѣ 4.3=12 коп., т. е. *вдвое меньше* прежняго.

Итакъ, *если множимое или множитель увеличатся въ нѣсколько разъ, то произведеніе увеличится во столько же разъ. Если множимое или множитель уменьшатся въ нѣсколько разъ, то и произведеніе уменьшится во столько же разъ.*

Если бы каждому нищему дано было не 4 коп., а вдвое больше, т. е. 8 коп., нищихъ же было бы не 6, а вдвое меньше, т. е. 3, то всѣмъ имъ пришлось бы раздать 8.3=24 коп., т. е. столько же, сколько и прежде.

Или, если бы каждому нищему дано было не 4 коп., а вдвое меньше, т. е. 2 коп., а нищихъ было бы вдвое больше, т. е. 12, то всѣмъ имъ пришлось бы раздать 2.12=24 коп., т. е. столько же

сколько и прежде. Слѣд. *произведеніе останется безъ перемѣны, если одинъ изъ производителей увеличится во сколько-нибудь разъ, а другой уменьшится во столько же разъ.*

Примѣры. 1) Какая перемѣна произойдетъ въ произведеніи, если множимое увеличить въ 6 разъ, а множителя уменьшить въ 2 раза?

Отъ увеличенія множимаго въ 6 разъ произведеніе увеличится также въ 6 разъ; а отъ уменьшенія множителя въ 2 раза шестерное произведеніе уменьшится въ 2 раза, т. е. сдѣлается уже не шестернымъ, а только тройнымъ; слѣд. отъ обоихъ дѣйствій, т. е. отъ увеличенія множимаго и уменьшенія множителя, произведеніе увеличится въ 3 раза. Если напр. дано умножить 5 на 12, а мы умножимъ 30 па 6, то получимъ въ произведеніи число 180, которое втрое больше произведенія 5 на 12.

2) Что сдѣлается съ пронзведеніемъ, если множимое увеличится въ 3 раза, а множитель въ 6 разъ?

Отъ увеличенія множимаго произведеніе увеличится въ 3 раза, а отъ увеличенія множителя тройное произведеніе увеличится въ 6 разъ; слѣд. произведеніе увеличится въ 18 разъ.

3) Дано 24 уиножить на 42, а виѣсто того 6 умножили на 7; что сдѣлалось съ прбизведеніемъ?

Такъ какъ множимое уменьшилось въ 4 раза, а множитель въ 6 разъ, то произведеніе уменьшилось въ 24 раза.

4) Дано было умножить 36 на 40, а вмѣсто того умножили 9 на 80; что сдѣлалось съ произведеніемъ?

Такъ какъ множимое уменьшено въ 4 раза, а множитель увеличенъ въ 2 раза, то произведеніе уменьшилось въ 2 раза.

77. Вопросы, 1) Что сдѣлается съ произведеніемъ, если множимое увеличится во сколько-нибудь разъ? всли множитель увеличится въ нѣсколько разъ? 2) При какомъ измѣненіи одного изъ производителей произведеніе уменьшится въ нѣсколько разъ? 3) При какомъ измѣненіп множимаго и множителя произведеніе останется безъ переиѣвы? 4) Множимое увеличили въ 7 разъ, а произведеніе должно быть увеличено въ 21 разъ; что надо сдѣлать съ множителемъ? 5) Что нужно сдѣлать съ множителемъ, чтобы произведеніе увеличилось въ 20 разъ? 6) Какъ нужно измѣнить множителя, чтобы уменьшить произведевіе въ 8 разъ? 7) Какъ можно измѣнить множимое в множителя, чтобы увеличить произведевіе въ 100 разъ? уменьшить въ 48 разъ? 8) Что сдѣлается съ произведеніемъ, если множителя увеличить на 1? уменьшить на 4? Изъ множимаго вычесть 3? увеличить множимое 20-ю? 9) При умноженіи двухъ чиселъ взята по ошибкѣ въ десяткахъ множителя цыфра 5 вмѣсто цыфры 3; на сколько полученное произведеніе больше истиннаго?

78. Измѣненія частнаго. Мы будемъ разсматривать измѣненія частнаго только въ такихъ случаяхъ, когда дѣлитель содержится въ дѣлимомъ ровно нѣсколько разъ, т. е. дѣленіе совершается безъ остатка. При этомъ, если дѣлимое или дѣлитель увеличиваются или

6; поэтому на 24 руб. надо смотрѣть какъ на произведеніе, а на 4 руб. и на 6 какъ на производителей. Имѣя произведеніе 24 руб. и котораго-нибудь изъ производителей—4 руб. или 6, можно найти другого производителя: надо только раздѣлить произведеніе на даннаго производителя; слѣд. дѣля 24 руб. на 4 руб., мы должны получить въ частномъ 6; а дѣля 24 руб. на 6, должны получить въ частномъ 4 руб. Обратимъ вниманіе на эти два случая; они существенно разнятся другъ отъ друга. Въ первомъ случаѣ, когда приходится дѣлить 24 руб. на 4 руб., и дѣлимое, и дѣлитель числа именованныя, и, какъ мы уже видѣли, это значитъ узнать, сколько разъ 4 руб. содержатся въ 24 руб. Частное 6, которое показываетъ это, будетъ слѣд. число отвлеченное, и, разсматривая дѣлимое 24 руб. какъ произведеніе, мы должны на частное 6 смотрѣть какъ на множителя (ибо множитель есть всегда число отвлеченное), а на дѣлителя 4 руб. какъ на множимое (ибо множимое и произведеніе всегда однородны между собою).

Во второмъ случаѣ приходится дѣлить 24 руб. на 6, т. е. на отвлеченное число; поэтому теперь мы должны разсматривать дѣлителя 6 какъ множителя, а частное 4 руб. какъ множимое. А такъ какъ множимое есть одно изъ равныхъ шести слагаемыхъ, сумма которыхъ составляетъ 24 руб., то, отыскивая множимое, мы опредѣляемъ каждое такое слагаемое; иначе говоря—опредѣляемъ *шестую часть* 24-хъ рублей, или дѣлимъ 24 руб. на 6 равныхъ частей; каждая такая часть и будетъ 4 рубля. Итакъ, если дѣлитель будетъ число отвлеченное, *то дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно число дѣлится на столько равныхъ частей, сколько единицъ находится въ дѣлителѣ.* Частное, показывающее, какъ велика каждая такая часть, будетъ число именованное, выраженное въ тѣхъ же единицахъ, въ какихъ выражено дѣлимое, потому что часть должна быть однородна съ цѣлымъ.

Такъ какъ шестая часть 24-хъ рублей въ 6 разъ менѣе 24 рублей, то слѣд., дѣля 24 руб. на 6, мы уменьшаемъ 24 руб. въ 6 разъ. Итакъ, *посредствомъ дѣленія можно уменьшить число въ нѣсколько разъ.*

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что при рѣшеніи практическихъ задачъ дѣленіе имѣетъ двоякое значеніе. Если вопросъ приводитъ къ тому, что надо *раздѣлить одно именованное число на другое* (однородное съ нимъ), то это значитъ *узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ; частное въ этомъ случаѣ будетъ число отвлеченное. Если же надо дѣлить именованное число на отвлеченное*, то это значитъ *первое число раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей*, и частное въ этомъ случаѣ, показывающее, какъ велика каждая такая часть, будетъ однородно съ дѣлимымъ и слѣд. будетъ число именованное.

74. Такимъ образомъ, *дѣленіе употребляется при рѣшеніи*

такихъ задачъ, когда нужно узнать, сколько разъ одно число содержится въ *другомъ, или во сколько разъ одно число больше или меньше другого, или какую часть одного даннаго числа составляетъ другое данное число, или когда одно число приходится раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей, или уменьшить данное число* въ *нѣсколько разъ*, и т. под. Напр.

1) Изъ 320 пудовъ мѣди вылито 64 одинаковыхъ колокола; сколько вѣсу въ каждомъ колоколѣ? Такъ какъ для этого надо опредѣлить 64-ю часть 320 пуд., то значитъ надо 320 раздѣлить на 64; тогда и найдемъ, что каждый колоколъ вѣситъ 5 пудовъ.

2) Какое число вчетверо меньше 628-ми? Для рѣшенія задачи надо 628 уменьшить въ 4 раза, т. е. раздѣлить на 4; найдемъ 157.

3) Локомотивъ проѣхалъ въ часъ 48 верстъ, а лошадь пробѣжала въ часъ 12 верстъ; во сколько разъ лошадь бѣжала тише локомотива? Раздѣливъ именованное число 48 верстъ на однородное съ нимъ 12 верстъ, получимъ въ частномъ отвлеченное число 4, показывающее, что лошадь шла вчетверо тише локомотива.

75. Вопросы: 1) Что значитъ раздѣлить одно число на другое? 2) Что наз. дѣленіемъ? 3) Какъ наз. числа, данныя для дѣленія, и число, которое получается при этомъ дѣйствіи? 4) Какъ обозначается дѣленіе? 5) Какъ дѣлается дѣленіе, когда дѣлитель есть число однозначное, а дѣлимое число однозначное или двузначное? 6) Какъ узнать, вѣрно ли найдена цыфра частнаго? 7) Какъ выражается дѣлимое черезъ дѣлителя, частное и остатокъ? 8) Какъ дѣлается дѣленіе многозначнаго числа на однозначное? 9) Какъ дѣлается дѣленіе многозначнаго числа на многозначное? 10) Какъ узнать, сколько цыфръ будетъ въ частномъ? 11) Какъ упростить дѣленіе, когда и дѣлимое, и дѣлитель оканчиваются нулями? 12) Какъ упростить дѣленіе, когда дѣлитель оканчивается нулями? 13) Какъ раздѣлить число на 10, 100, 1000..., вообще на единицу съ нулями? 14) Какъ повѣрить дѣленіе? 15) Какія значенія можетъ имѣть дѣленіе при рѣшеніи практическихъ задачъ? 16) Посредствомъ какого дѣйствія число увеличивается сколькими-нибудь единицами? уменьшается на сколько-нибудь единицъ? увеличивается въ нѣсколько разъ? уменьшается въ нѣсколько разъ? 17) Все ли равно — уменьшить число 6-ю, или въ 5 разъ? 18) Какія задачи рѣшаются посредствомъ дѣленія? 19) Зная дѣлителя, частное, и остатокъ, какъ найти дѣлимое? 20) По данному дѣлимому, частному и остатку найти дѣлителя? 21) Зная дѣлимое, дѣлителя и частное, какъ найти остатокъ? 22) Какъ по данному произведенію и одному изъ производителей найти другого производителя? 23) Дѣлимое=29, частное=3, остатокъ=5; найти дѣлителя? 24) Дѣлим.=39, дѣлит.=8, част.=4, найти остатокъ? 25) Дѣлит.=9, част.=9, ост.=2; найти дѣлимое? 26) Составить задачу, для рѣшенія которой надо раздѣлить 12 фунтовъ на 4? 12 фунтовъ на 4 фун.?

ИЗМѢНЕНІЯ ПРОИЗВЕДЕНІЯ И ЧАСТНАГО.

76. Измѣненія произведенія. Умножить одно число на другое значитъ первое число взять слагаемымъ столько разъ, сколько во

второмъ находится единицъ; слѣд. произведеніе есть сумма нѣсколькихъ слагаемыхъ, равныхъ множимому. Но сумма увеличивается съ увеличеніемъ слагаемыхъ, слѣд. *произведеніе увеличивается съ увеличеніемъ множимаго*. Равнымъ образомъ, складывая одно и то же слагаемое большее число разъ, мы должны получить сумму большую; слѣд. *произведеніе увеличивается съ увеличеніемъ множителя*. Обратно: *произведеніе уменьшается съ уменьшеніемъ котораго-нибудь изъ производителей*. При этомъ, если производители увеличиваются или уменьшаются во *сколько-нибудь разъ*, то между измѣненіемъ ихъ и измѣненіемъ произведенія существуетъ весьма простая зависимость.

Такъ, если множителя оставить безъ перемѣны, а множимое увеличить въ 2, 3 и т. д. разъ, то произведеніе также увеличится въ 2, 3 и т. д. разъ, потому что придется то же самое число разъ брать слагаемымъ число, которое будетъ вдвое, втрое и т. д. больше прежняго.

Если множимое оставить безъ перемѣны, а множителя увеличить въ 2, 3 и т. д. разъ, то произведеніе увеличится во столько же разъ, такъ какъ одно и то же число придется брать слагаемымъ вдвое, втрое и т. д. больше разъ.

Для уясненія всѣхъ этихъ измѣненій, возьмемъ примѣръ: сколько денегъ должно раздать шестерымъ нищимъ, если каждому будетъ дано по 4 коп.? Чтобы найти это, надо 4 умножить на 6; слѣд. всѣ нищіе получатъ 4 . 6=24 коп.

Если бы каждому нищему дали *вдвое больше* прежняго, т. е. 8 коп., то всѣмъ шестерымъ пришлось бы раздать 8.6=48 коп., т. е. также *вдвое больше* прежняго. Если бы нищихъ было *вдвое больше*, т. е. не 6, а 12, то давая каждому по 4 коп., всѣмъ пришлось бы раздать 4.12=48 коп., т. е. опять *вдвое больше* прежняго.

Наоборотъ, если бы каждому нищему дали по 2 коп., т. е. *вдвое меньше* прежняго, то всѣмъ шестерымъ пришлось бы раздать 2.6=12 коп., т. е. также *вдвое меньше* прежняго. Если бы нищихъ было не шестеро, а *вдвое меньше*, т. е. 3, то, давая каждому по 4 коп., пришлось бы раздать всѣмъ вмѣстѣ 4.3=12 коп., т. е. *вдвое меньше* прежняго.

Итакъ, *если множимое или множитель увеличатся въ нѣсколько разъ, то произведеніе увеличится во столько же разъ. Если множимое или множитель уменьшатся въ нѣсколько разъ, то и произведеніе уменьшится во столько же разъ.*

Если бы каждому нищему дано было не 4 коп., а вдвое больше, т. е. 8 коп., нищихъ же было бы не 6, а вдвое меньше, т. е. 3, то всѣмъ имъ пришлось бы раздать 8.3=24 коп., т. е. столько же, сколько и прежде.

Или, если бы каждому нищему дано было не 4 коп., а вдвое меньше, т. е. 2 коп., а нищихъ было бы вдвое больше, т. е. 12, то всѣмъ имъ пришлось бы раздать 2.12=24 коп., т. е. столько же

сколько и прежде. Слѣд. *произведеніе останется безъ перемѣны, если одинъ изъ производителей увеличится во сколько-нибудь разъ, а другой уменьшится во столько же разъ.*

Примѣры. 1) Какая перемѣна произойдетъ въ произведеніи, если множимое увеличить въ 6 разъ, а множителя уменьшить въ 2 раза?

Отъ увеличенія множимаго въ 6 разъ произведеніе увеличится также въ 6 разъ; а отъ уменьшенія множителя въ 2 раза шестерное произведеніе уменьшится въ 2 раза, т. е. сдѣлается уже не шестернымъ, а только тройнымъ; слѣд. отъ обоихъ дѣйствій, т. е. отъ увеличенія множимаго и уменьшенія множителя, произведеніе увеличится въ 3 раза. Если напр. дано умножить 5 на 12, а мы умножимъ 30 па 6, то получимъ въ произведеніи число 180, которое втрое больше произведенія 5 на 12.

2) Что сдѣлается съ произведеніемъ, если множимое увеличится въ 3 раза, а множитель въ 6 разъ?

Отъ увеличенія множимаго произведеніе увеличится въ 3 раза, а отъ увеличенія множителя тройное произведеніе увеличится въ 6 разъ; слѣд. произведеніе увеличится въ 18 разъ.

3) Дано 24 умножить на 42, а вмѣсто того 6 умножили на 7; что сдѣлалось съ произведеніемъ?

Такъ какъ множимое уменьшилось въ 4 раза, а множитель въ 6 разъ, то произведеніе уменьшилось въ 24 раза.

4) Дано было умножить 36 па 40, а вмѣсто того умножили 9 на 80; что сдѣлалось съ произведеніемъ?

Такъ какъ множимое уменьшено въ 4 раза, а множитель увеличенъ въ 2 раза, то произведеніе уменьшилось въ 2 раза.

77. Вопросы. 1) Что сдѣлается съ произведеніемъ, если множимое увеличится во сколько-нибудь разъ? если множитель увеличится въ нѣсколько разъ? 2) При какомъ измѣненіи одного изъ производителей произведеніе уменьшится въ нѣсколько разъ? 3) При какомъ измѣненіи множимаго и множителя произведеніе останется безъ перемѣны? 4) Множимое увеличили въ 7 разъ, а произведеніе должно быть увеличено въ 21 разъ; что надо сдѣлать съ множителемъ? 5) Что нужно сдѣлать съ множителемъ, чтобы произведеніе увеличилось въ 20 разъ? 6) Какъ нужно измѣнить множителя, чтобы уменьшить произведеніе въ 8 разъ? 7) Какъ можно измѣнить множимое и множителя, чтобы увеличить произведеніе въ 100 разъ? уменьшить въ 48 разъ? 8) Что сдѣлается съ произведеніемъ, если множителя увеличить на 1? уменьшить на 4? Изъ множимаго вычесть 3? увеличить множимое 20-ю? 9) При умноженіи двухъ чиселъ взята по ошибкѣ въ десяткахъ множителя цыфра 5 вмѣсто цыфры 3; на сколько полученное произведеніе больше истиннаго?

78. Измѣненія частнаго. Мы будемъ разсматривать измѣненіи частнаго только въ такихъ случаяхъ, когда дѣлитель содержится въ дѣлимомъ ровно нѣсколько разъ, т. е. дѣленіе совершается безъ остатка. При этомъ, если дѣлимое или дѣлитель увеличиваются или

уменьшаются *во сколько-нибудь разъ,* то между измѣненіемъ ихъ и измѣненіемъ частнаго существуетъ простая зависимость.

Чтобы яснѣе вывести эту зависимость, возьмемъ примѣръ: сколько фунтовъ муки можно купить на 48 коп., если фунтъ стоитъ 8 коп.? Фунтовъ муки можно купить столько, сколько разъ 8 коп. содержатся въ 48 коп.; а слѣд. надо раздѣлить 48 на 8. Итакъ на 48 коп. можно купить 6 фун. муки. Если бы по той же цѣнѣ надо было купить муки не на 48 коп., а на сумму вдвое большую, т. е. на 96 коп., то, раздѣливши 96 на 8, нашли бы частное 12, вдвое большее прежняго.

Итакъ, *если дѣлимое увеличится во сколько-нибудь разъ, то и частное увеличится во столько же разъ.*

Если бы требовалось купить муки не на 48 коп., а на сумму, вдвое меньшую, т. е. на 24 коп., то, раздѣливъ 24 на 8, нашли бы, что на 24 коп. можно купить муки 3 фунта, т. е. вдвое меньше прежняго. Итакъ, *если дѣлимое уменьшится во сколько-нибудь разъ, то и частное уменьшится во столько же разъ.*

Если бы фунтъ муки стоилъ не 8 коп., а вдвое дороже, т. е. 16 коп., то на 48 коп. можно было бы купить уже не 6 фунтовъ, а только 48 : 16, или 3 фунта, т. е. вдвое меньше прежняго. Итакъ, *если дѣлитель увеличится во сколько-нибудь разъ, то частное уменьшится во столько же разъ.*

Наоборотъ, если бы мука подешевѣла, и фунтъ ея стоилъ бы не 8 коп., а вдвое меньше, т. е. 4 коп., то на 48 коп. можно было бы купить 48 : 4 или 12 фунтовъ муки, т. е. вдвое больше прежняго. Итакъ, *если дѣлитель уменьшится во сколько-нибудь разъ, то частное увеличится во столько же разъ.*

Наконецъ, если бы мука вздорожала вдвое, т. е. фунтъ ея стоилъ бы 16 коп., вмѣсто прежнихъ 8, но на покупку муки дано было не 48 коп., а вдвое больше, т. е. 96 коп., то муки можно было бы купить 96 : 16, или 6 фун., т. е. столько же, сколько и прежде.

Точно также, если бы мука сдѣлалась вдвое дешевле, т. е. фунтъ ея стоилъ бы 4 коп., но на покупку муки дано было бы не 48 коп., а вдвое меньше, т. е. 24 коп., то муки можно было бы купить 24 : 4, или опять 6 фунтовъ, т. е. столько же, сколько и прежде.

Итакъ, *если дѣлимое и дѣлитель увеличатся или уменьшатся оба въ одно и то же число разъ, то частное останется безъ перемѣны.*

Примѣры. 1) Что сдѣлается съ частнымъ, если дѣлимое увеличится въ два раза, а дѣлитель увеличится въ 8 разъ?

Если бы дѣлитель увеличился также въ 2 раза, то частное осталось бы безъ перемѣны; но какъ онъ увеличивается въ 8, или въ 2 . 4 разъ, то частное должно измѣниться отъ того, что дѣлитель увеличился еще въ 4 раза; слѣд. частное уменьшится въ 4 раза.

2) Что сдѣлается съ частнымъ, если дѣлимое увеличится въ 6 разъ, а дѣлитель въ 2 раза?

Отъ увеличенія дѣлимаго въ 6 разъ частное увеличится въ 6 разъ; а отъ увеличенія дѣлителя въ 2 раза шестерное частное уменьшится въ 2 раза, т. е. обратится въ тройное; иначе говоря—частное увеличится въ 3 раза.

3) Какая перемѣна произойдетъ съ частнымъ, если дѣлимое увеличить въ 5 разъ, а дѣлителя уменьшить въ 3 раза?

Отъ увеличенія дѣлимаго частное увеличится въ 5 разъ, а отъ уменьшенія дѣлителя пятерное частное увеличится въ 3 раза; слѣд. частное увеличится въ 15 разъ.

4) Надо было раздѣлить 64 на 16, а вмѣсто этого раздѣлили 128 на 4; что сдѣлалось съ частнымъ?

Такъ какъ дѣлимое увеличилось въ 2 раза, а дѣлитель уменьшился въ 4 раза, то частное увеличилось въ 8 разъ.

5) Надо было раздѣлить 60 на 15, а вмѣсто этого раздѣлили 12 на 3; что сдѣлалось съ частнымъ?

Дѣлимое и дѣлитель уменьшены въ 5 разъ, слѣд. частное не измѣнилось.

79. Измѣненія частнаго можно вывести, разсматривая дѣлимое какъ произведеніе, а дѣлителя и частное какъ производителей. Умножая или дѣля на какое-нибудь число дѣлимое, мы увеличиваемъ или уменьшаемъ въ нѣсколько разъ произведеніе двухъ чиселъ, и такъ какъ при этомъ дѣлитель, т. е. одинъ изъ производителей, остается безъ перемѣны, то другой производитель, т. е. частное, долженъ во столько же разъ увеличиться или уменьшиться.

Наоборотъ, увеличивая дѣлителя во сколько-нибудь разъ, мы увеличиваемъ одного изъ производителей, и если дѣлимое, т. е. произведеніе, остается безъ перемѣны, то частное, т. е. другой производитель, должно уменьшиться во столько же разъ. Стало быть, при измѣненіи дѣлителя, частное измѣняется во столько же разъ, но *въ обратномъ смыслѣ* (т. е. уменьшается при увеличеніи дѣлителя и увеличивается при уменьшеніи его).

80. Вопросы. 1) Что сдѣлается съ частнымъ, если дѣлимое увеличится въ нѣсколько разъ? если дѣлитель увеличится въ нѣсколько разъ? если дѣлимое уменьшится во сколько-нибудь разъ? дѣлитель уменьшится въ нѣсколько разъ? 2) При какомъ измѣненіи дѣлимаго и дѣлителя частное останется безъ перемѣны? 3) Что сдѣлается съ частнымъ, если дѣлимое уменьшится въ 6 разъ, а дѣлитель уменьшится въ 24 раза? 4) Дѣлимое увеличено въ 5 разъ, а частное должно быть увеличено въ 35 разъ; что надо сдѣлать для этого съ дѣлителемъ? 5) Какъ можно измѣнить дѣлимое, или дѣлителя, или обоихъ вмѣстѣ, чтобы частное уменьшилось въ 40 разъ? увеличилось въ 24 раза? 6) Какъ измѣнится частное, если къ дѣлимому придать удвоеннаго дѣлителя? изъ дѣлимаго вычесть утроеннаго дѣлителя? 7) Дѣленіе двухъ чиселъ совершается безъ остатка; къ дѣлителю придали единицу; сколько надо придать къ дѣлимому, чтобы дѣленіе полученныхъ новыхъ двухъ чиселъ также совершилось безъ остатка и въ частномъ получилось бы то же число, что и прежде?

Употребленіе скобокъ при умноженіи и дѣленіи.

81. Возьмемъ задачу: сумму чиселъ 140, 236 и 65, увеличенную въ 7 разъ, сложить съ разностью 4282 и 2362, уменьшенной въ 3 раза, и полученную сумму раздѣлить на 744? Чтобы обозначить этотъ рядъ дѣйствій, мы напишемъ сначала сумму 140+235+65, и чтобы показать, что она должна быть увеличена въ 7 разъ, или умножена на 7, заключимъ ее въ скобки и послѣ нихъ поставимъ знакъ умноженія и 7; т. е. напишемъ (140+235+65) . 7. Далѣе, чтобы обозначить, что разность 4282 и 2362 должна быть уменьшена въ 3 раза, мы поставимъ разность 4282—2362 въ скобки и послѣ скобокъ знакъ дѣленія и 3; т. е. напишемъ (4282—2362) : 3. Такъ какъ, по условію задачи, надо взять сумму обоихъ результатовъ и раздѣлить ее на 744, то, соединивъ оба написанныя выраженія знакомъ плюсъ, мы заключимъ все въ новыя скобки и послѣ нихъ поставимъ знакъ дѣленія и 744, т. е. напишемъ

$$\{(140+235+65) . 7+(4282-2362) : 3\} : 744.$$

Произведя показанныя дѣйствія, найдемъ, что результатъ ихъ=5. Возьмемъ еще задачу: разность частнаго 92700 и 1236 и частнаго отъ дѣленія суммы 215 и 165 на 10, увеличеннаго частнымъ отъ дѣленія разности 463 и 315 на 4, умножить на 8? Обозначимъ сначала, что сумму 215 и 165 надо раздѣлить на 10, а разность 463 и 315 на 4; т. е. напишемъ (215+165) 10 и (463—315) : 4. Соединивъ потомъ эти выраженія знакомъ плюсъ, заключимъ все въ новыя скобки и отдѣлимъ знакомъ минусъ отъ частнаго 92700 и 1236, или отъ 92700 : 1236; т. е. напишемъ

$$92700 : 1236-\{(215+165) : 10+(463-315) : 4\}.$$

Наконецъ, чтобы показать, что всю эту разность надо умножить на 8, заключимъ все это выраженіе въ новыя скобки, поставимъ послѣ нихъ знакъ умноженія и 8; т. е. напишемъ

$$[92700 \quad 1236-\{(215+165) \quad 10+(463-315) : 4\}] . 8.$$

Произведя показанныя дѣйствія, получимъ въ результатѣ 0.

Вотъ еще задача. Вычислить выраженіе:

$$[\{56 : 8+(4-2) . 3+(1283-1190). 8+(7963-7803) \quad 8\} . 14 - -878] : (7830-2830).$$

Это значитъ: сумму 56, уменьшеннаго въ 8 разъ, разности 4 и 2, увеличенной въ 3 раза, разности 1283 и 1190, увеличенной въ 8 разъ, и разности 7963 и 7803, уменьшенной въ 8 разъ, умножить на 14; изъ полученнаго произведенія вычесть 878, и полученную разность раздѣлить на разность 7830 и 2830. Производя показанныя дѣйствія, найдемъ, что 56 : 8=7; 4—2=2, слѣд. (4—2).3=2.3=

=6; 1283 — 1190 = 93, слѣд. (1283 — 1190) . 8=93 . 8 = 744; 7963—7803=160; слѣд. (7963—7803) : 8=160 : 8=20; 56 : 8+ +(4—2) . 3 + (1283—1190) 8+(7963—7803) : 8=7+6+744+ +20=777. Умножая это число на 14, получимъ въ произведеніи 10878: а потому 777 . 14—878=10878—878=10000. И наконецъ, найдя, что 7830—2830=5000, и раздѣливъ 10000 на 5000, увидимъ, что все данное выраженіе=2.

РѢШЕНІЕ ЗАДАЧЪ.

82. Мы уже рѣшали задачи, въ которыхъ неизвѣстное число можно опредѣлить черезъ данныя числа посредствомъ одного какого-либо дѣйствія; при этомъ, зная значеніе каждаго дѣйствія, можно всегда опредѣлить, какое изъ нихъ надо произвести, чтобы рѣшить задачу. Возьмемъ напр. задачу: къ какому числу надо прибавить 42, чтобы получить 100?

Искомое число будетъ меньше 100 на 42 единицы; слѣд. чтобы найти его, надо вычесть 42 изъ 100; получимъ 58.

Вотъ еще задача: если неизвѣстное число уменьшимъ въ 7 разъ, то получимъ 24; какъ велико оно?

Очевидно, чтобы найти его, надо 24 увеличить въ 7 разъ; т. е. искомое число=24 . 7=168.

Задачи, требующія для своего рѣшенія только одного дѣйствія, наз. *простыми*.

83. Но есть и такія задачи, для рѣшенія которыхъ надо произвести различныя дѣйствія съ данными числами, потомъ произвести дѣйствія съ полученными результатами и т. д. Задачи, требующія для своего рѣшенія болѣе одного дѣйствія, наз. *сложными* задачами. Возьмемъ такую задачу.

Купецъ за 17 одинакихъ бочекъ сахару заплатилъ 3332 руб.; 195 пудовъ сахару онъ продалъ за 1755 руб., получивъ прибыли 390 руб. Сколько пудовъ сахару было въ каждой бочкѣ?

Въ этой задачѣ имѣется нѣсколько данныхъ чиселъ: число купленныхъ бочекъ (17), стоимость ихъ (3332 руб).; число пудовъ сахару, проданныхъ купцомъ (195); сумма, за которую продана часть сахару 1755 р.); прибыль (390 р.), полученная при этой продажѣ. При помощи этихъ данныхъ мы можемъ составить и рѣшить нѣсколько простыхъ задачъ. Такъ напр., зная, что купецъ заплатилъ за 17 бочекъ сахару 3332 руб., мы можемъ узнать, сколько онъ платилъ за каждую бочку. Зная, что, продавши 195 пуд. за 1755 р., купецъ получилъ 390 руб. прибыли, можемъ узнать, что стоили 195 пуд. самому купцу. Зная, что купецъ продалъ 195 пуд. за 1755 р., можно узнать, почемъ за пудъ онъ продавалъ сахаръ, и т. под. Но въ задачѣ нѣтъ такихъ данныхъ, при помощи которыхъ можно было бы составить и рѣшить такую простую задачу, въ которой спрашивалось бы то, что спрашивается въ нашей

сложной задачѣ, т. е. сколько пудовъ сахару было въ каждой бочкѣ; поэтому нашу задачу и нельзя рѣшить однимъ дѣйствіемъ. Чтобы рѣшить ее, мы выберемъ изъ перечисленныхъ нами выше простыхъ задачъ, напр. вторую; т. е. зная, что купецъ продалъ 195 пуд. за 1755 руб. и получилъ при этомъ 390 руб. прибыли, мы опредѣлимъ, сколько онъ самъ заплатилъ за 195 пуд.; для этого вычтемъ 390 руб. изъ 1755 руб., получимъ 1365 руб. Теперь, зная, что купецъ заплатилъ за 195 пуд. сахару 1365 руб., мы можемъ рѣшить простую задачу о томъ, сколько платилъ купецъ за каждый пудъ сахару; для этого надо 1365 руб. раздѣлить на 195; тогда и найдемъ, что за пудъ сахару купецъ платилъ по 7 руб. Теперь съ полученнымъ числомъ 7 руб. и съ числами, данными въ нашей сложной задачѣ, составимъ новую простую задачу, а именно: зная, что купецъ заплатилъ за весь сахаръ 3332 руб. и что за каждый пудъ онъ платилъ по 7 руб., найдемъ, сколько онъ купилъ всего пудовъ сахару. Раздѣливъ для этого 3332 на 7, узнаемъ, что куплено всего 476 пуд. Теперь уже мы можемъ составить простую задачу, содержащую вопросъ данной сложной задачи; а именно: зная, что въ 17 одинакихъ бочкахъ было 476 пуд. сахару, мы можемъ опредѣлить, сколько сахару было въ каждой бочкѣ; для этого раздѣлимъ 476 пуд. на 17; найдемъ, что въ каждой бочкѣ было 28 пуд. сахару.

84. Такимъ образомъ для рѣшенія нашей сложной задачи нужно было составить и рѣшить слѣдующія простыя задачи:

1) Купецъ, продавъ 195 пуд. сахару за 1755 руб., получилъ прибыли 390 руб.; сколько онъ самъ заплатилъ за это количество сахару? Рѣшеніе. 1755—390=1365.

2) Купецъ за 195 пуд. сахару заплатилъ 1365 руб.; почемъ онъ платилъ за пудъ? Рѣшеніе. 1365 : 195=7.

3) Купецъ купилъ сахару на 3332 руб. и платилъ за пудъ по 7 руб.; сколько сахару онъ купилъ? Рѣшеніе. 3332 : 7=476.

4) Въ 17 одинакихъ бочкахъ было 476 пуд. сахару; сколько сахару было въ каждой бочкѣ? Рѣшеніе. 476 : 17=28.

85. Самое рѣшеніе простыхъ задачъ насъ затруднить не можетъ; но *составить* простыя задачи, необходимыя для рѣшенія данной сложной, и указать порядокъ, въ которомъ онѣ должны быть рѣшены, бываетъ иногда весьма затруднительно, и дать для этого какое-нибудь общее правило невозможно — здѣсь все зависитъ отъ сообразительности рѣшающаго. Въ самомъ началѣ рѣшенія нашей задачи мы видѣли, что при помощи данныхъ ея можно составить нѣсколько простыхъ задачъ; въ выборѣ изъ нихъ той задачи, которая была бы пригодна для рѣшенія сложной задачи, легко можно ошибиться; можно даже совсѣмъ упустить изъ виду возможность при помощи данныхъ сложной задачи составить такую простую за-

дачу, которая пригодилась бы для рѣшенія. То же самое можно сказать и про всѣ послѣдующія простыя задачи.

86. При составленіи простыхъ задачъ мы начали перебирать данныя сложной задачи и при ихъ помощи стали составлять простыя задачи, т. е. мы начали разсужденіе съ *данныхъ* сложной задачи; но можно также начинать и съ *вопроса* ея. Возьмемъ напр. задачу:

Куплено 345 четвертей ржи по 4 рубля четверть; рожь эта перевезена на подводахъ, при чемъ на каждую подводу клали по 5 четвертей и платили за подводу по 3 руб.; при перевозкѣ 28 четвертей пропало. Почемъ за четверть продали оставшуюся рожь, если на весь товаръ получено 315 руб. прибыли?

Для рѣшенія задачи будемъ разсуждать слѣдующимъ образомъ. Чтобы узнать, почемъ продавали рожь, должно знать, сколько четвертей продано и сколько получено за это денегъ; слѣд. намъ придется рѣшить такую простую задачу, въ которой по суммѣ, вырученной за всю рожь, и по количеству проданной ржи требуется опредѣлить цѣну одной четверти. Но данныхъ для этой задачи у насъ еще нѣтъ. Чтобы опредѣлить первое изъ нихъ, т. е. сумму денегъ, полученныхъ за всю рожь, замѣтимъ, что эта сумма составилась изъ суммы, которая заплачена за рожь, изъ суммы, заплаченной за перевозку, и наконецъ изъ прибыли.

Для опредѣленія второго изъ недостающихъ данныхъ, т. е. количества четвертей проданной ржи, замѣчаемъ, что это количество равно количеству купленной ржи безъ количества пропавшей. Поэтому прежде рѣшенія первой простой задачи надо рѣшить еще слѣдующія двѣ:

По суммѣ, уплаченной за рожь, суммѣ, уплаченной за перевозку, и полученной прибыли, опредѣлить, за сколько была продана рожь?

По количеству купленной ржи и количеству пропавшей опредѣлить количество проданной ржи?

Но для рѣшенія первой изъ этихъ задачъ у насъ нѣтъ данныхъ; именно неизвѣстна сумма, заплаченная за рожь, и сумма, заплаченная за перевозку. Сумма, заплаченная за рожь, опредѣлится по количеству купленной ржи и покупной цѣнѣ; а сумма, заплаченная за перевозку, по количеству подводъ и цѣнѣ за каждую подводу.

Такимъ образомъ, намъ надо еще прежде рѣшить двѣ задачи: 1) о суммѣ, заплаченной за рожь, и 2) о суммѣ, заплаченной за перевозку. Для первой данныя есть; а чтобы получить данныя для второй, надо еще раньше узнать, сколько потребовалось подводъ, воспользовавшись тѣмъ, что въ сложной задачѣ дано, сколько было перевезено ржи и сколько четвертей клали на каждую подводу. Такимъ образомъ, для рѣшенія нашей сложной задачи придется рѣшить слѣдующія простыя задачи:

1) Зная, что перевезли 345 четвертей ржи и на каждую подводу

клали по 5 четвертей, опредѣлить, сколько потребовалось подводъ? Рѣшеніе. 345 : 5=69.

2) Зная количество подводъ (69), на которыхъ перевезли рожь, и цѣну каждой подводы (3 руб.), опредѣлять, сколько рубл. стоила перевозка? Рѣшеніе. 3 . 69=207.

3) Зная, что ржи куплено 345 четвертей, по 4 руб. четверть, опредѣлить, сколько заплачено за всю рожь? Рѣш. 4.345=1380.

4) Зная стоимость всей ржи (1380 руб.), стоимость ея перевозки (207 р.) и прибыль (315 руб.), опредѣлить, за сколько была продана рожь? Рѣш. 1380+207+315=1902.

5) Зная, что изъ 345 четвертей ржи пропало 28 четв., опредѣлить, сколько четвертей продано? Рѣш. 345—28=317.

6) Зная, сколько продано четвертей ржи (317) и сколько выручено денегъ (1902 р.), опредѣлить, почемъ за четверть продавали рожь?

Рѣш. 1902 : 317=6. Итакъ, рожь продана по 6 р. за четверть.

87. При письменномъ рѣшеніи всякой сложной задачи, должно прежде всего сообразить, какія слѣдуетъ составить и рѣшить простыя задачи, а потомъ записать какъ эти задачи, такъ и ихъ рѣшенія. Но такъ какъ данныя каждой простой задачи или находятся въ сложной задачѣ, или берутся изъ предыдущихъ, уже рѣшенныхъ, простыхъ задачъ, то для сокращенія письма нѣтъ надобности выписывать все содержаніе каждой простой задачи, а достаточно ограничиться только однимъ вопросомъ ея.

Рѣшенія двухъ, взятыхъ нами, задачъ представятся при такомъ способѣ обозначенія въ слѣдующемъ видѣ.

Первая зад. 1) Сколько руб. заплатилъ купецъ за 195 пуд.?
1755—390=1365.
2) Сколько руб. платилъ купецъ за пудъ?
1365 : 195=7.
3) Сколько пудовъ сахару куплено?
3332 : 7=476.
4) Сколько пуд. сахару было въ каждой бочкѣ?
476 : 17=28.

Вторая зад. 1) Сколько подводъ надо для перевозки ржи?
345 : 5=69.
2) Сколько руб. заплачено за перевозку ржи?
3 . 69=207.
3) Сколько руб. заплачено за рожь?
4 . 345=1380.
4) За сколько руб. продана рожь?
1380+207+315=1902.
5) Сколько четвертей продано?
345—28=317.
6) За сколько руб. продана каждая четверть?
1902 : 317=6.

88. Рѣшимъ еще нѣсколько задачъ.

1) Найти такое число, что если мы его удвоимъ и потомъ придадимъ 45, то получимъ число, въ 5 разъ бóльшее искомаго?

Чтобы не писать при рѣшеніи задачи слова *неизвѣстное число* или *искомое число*, мы означимъ его буквою x; удвоенное неизв. число надо означить $2x$. По условіямъ задачи имѣемъ $2x+45=5x$. Итакъ $2x$ и 45 суть слагаемыя, а $5x$ есть сумма; слѣд. слагаемое 45 равно суммѣ $5x$ безъ другого слагаемаго $2x$; т. е. $45=5x-2x$. А отнимая $2x$ отъ $5x$, получимъ $3x$; слѣд. $45=3x$, и потому x найдется, если мы 45 раздѣлимъ на 3. Итакъ $x=45:3=15$.

Чтобы узнать, вѣрно ли мы рѣшили задачу, мы сдѣлаемъ съ найденнымъ числомъ 15 то, что, по условіямъ задачи, требовалось сдѣлать съ искомымъ числомъ. Для этого мы 15 удвоимъ, получимъ 30; къ 30 придадимъ 45, получимъ 75; это число больше 15 въ 5 разъ, что и требовалось въ задачѣ.

2) Девятерное неизвѣстное число безъ 12 равно пятерному неизв. числу, увеличенному 36-ю; чему равно неизвѣст. число?

По условіямъ задачи имѣемъ $9x-12=5x+36$; слѣд. $9x$ болѣе $5x+36$ двѣнадцатью, т. е. $9x=5x+36+12$, или $9x=5x+48$, слѣд. $9x-5x=48$, или $4x=48$; а $x=48:4=12$.

3) Если изъ тройного неизвѣстнаго числа вычтемъ 5 и разность уменьшимъ въ 7 разъ, то получимъ 1. Чему равно неизв. число?

По условіямъ задачи имѣемъ $(3x-5):7=1$; слѣд. разность $3x-5$ должна быть въ 7 разъ больше 1, т. е. $3x-5=7$, а потому $3x=7+5$, или $3x=12$; а $x=12:3=4$.

4) 15 арш. сукна стоитъ 75 руб.; что будетъ стоить 28 арш. того же сукна?

Одинъ арш. стоитъ въ 15 разъ меньше, чѣмъ 15 арш., т. е. 75 р. : 15=5 руб.; а 28 арш. будутъ стоить въ 28 разъ больше, чѣмъ одинъ, т. е. 5 . 28=140 р.

5) Поле въ 350 десятинъ раздѣлено между двумя крестьянами такъ, что часть перваго вчетверо менѣе части второго. Сколько десятинъ у каждаго?

Доля перваго содержится 4 раза въ части второго и слѣд. 5 разъ во всемъ числѣ 350 десятинъ; поэтому она $=350:5=70$ десятинамъ; а доля второго $=70.4=280$ десят.

6) Раздѣлить 450 руб. между тремя братьями такъ, чтобы второй получилъ втрое, а третій впятеро болѣе перваго?

Доля перваго содержится 3 раза въ долѣ второго и 5 разъ въ долѣ третьяго; слѣд. во всемъ числѣ 450 она содержится 9 разъ; а потому она $=450:9=50$ руб.; доля второго $=150$ руб.; доля третьяго $=250$ руб.

7) На 260 руб. куплено сукна; въ другой разъ на 296 руб. куплено по той же цѣнѣ 9-ю арш. больше. Сколько арш. сукна куплено было въ первый разъ?

Во второй разъ заплачено 36-ю руб. больше, чѣмъ въ первый; слѣд. 9 арш. стоятъ 36 руб.; а одинъ арш. стоитъ 4 руб.; поэтому на 260 руб. куплено 260 : 4 = 65 арш.

8) Въ трехъ кошелькахъ 369 руб.; если изъ перваго вынуть 29 руб., а изъ второго 40 руб., то во всѣхъ трехъ будетъ поровну; сколько денегъ въ каждомъ кошелькѣ?

Если изъ перваго вынуть 29, а изъ второго 40 руб., то во всѣхъ кошелькахъ останется 300 руб., а въ каждомъ 300 : 3 = 100 руб. Итакъ, въ третьемъ кошелькѣ находится 100 руб.; во второмъ больше этого на тѣ 40 руб., которые мы вынули, т. е. 140 руб.; а въ первомъ на 29 руб. больше, т. е. 129 руб.

9) За 80 аршинъ сукна заплачено 240 руб.; сколько можно купить аршинъ того же сукна на 360 руб.?

Одинъ арш. сукна стоитъ 240 : 80 = 3 руб.; слѣд. на 360 руб. можно купить 360 : 3=120 арш. сукна.

10) Въ двухъ ящикахъ находится 84 фунта чаю; если изъ перваго переложить во второй 14 фунтовъ, то въ обоихъ будетъ поровну; сколько фунтовъ чаю находится въ каждомъ ящикѣ?

Послѣ переложенія, въ каждомъ ящикѣ будетъ 84 : 2=42 фунта чаю; а до этого въ первомъ ящикѣ было 42+14=56 фунт., а во второмъ 42—14=28 фунт.

11) Пять братьевъ раздѣлили наслѣдство поровну; трое первыхъ отдали сестрѣ по 800 руб., и у нихъ осталось столько денегъ, сколько имѣетъ каждый изъ остальныхъ. Какъ велико наслѣдство?

Если доля каждаго брата$=x$, то трое первыхъ получили $3x$; сестрѣ они отдали 2400 руб.; а потому у нихъ осталось $3x-2400$, и по условію задачи $3x-2400=x$, или $2x=2400$, откуда $x=2400:2=$ $=1200$, а все наслѣдство$=1200.5=6000$ руб.

12) Изъ городовъ A и B, между которыми 875 верстъ, выѣхали въ одно время два курьера навстрѣчу другъ другу; первый проѣзжаетъ въ часъ по 11, второй по 14 верстъ. Черезъ сколько часовъ и на какомъ разстояніи отъ A курьеры встрѣтятся?

Курьеры приближаются другъ къ другу въ 1 часъ на 25 верстъ, и если бы отъ A до B было 25 верстъ, то курьеры встрѣтились бы черезъ часъ; но какъ разстояніе между городами есть 875 вер., то курьеры встрѣтятся черезъ столько часовъ, сколько разъ 25 содержится въ 875, т. е. черезъ 875 : 25=35 часовъ. Первый курьеръ проѣзжаетъ въ часъ по 11 верстъ; слѣд. въ 35 часовъ онъ проѣдетъ 11.35=385 вер., и курьеры встрѣтятся въ 385 вер. отъ A.

13) Для перевозки 36 зеркалъ нанятъ извозчикъ, съ условіемъ, что за доставку каждаго зеркала онъ получитъ 2 руб.; а за каждое, разбитое имъ зеркало онъ самъ долженъ заплатить 12 руб. Дорогою онъ разбилъ нѣсколько зеркалъ, и при разсчетѣ получилъ 30 руб. Сколько зеркалъ доставилъ онъ въ цѣлости?

Если бы извозчикъ доставилъ въ цѣлости всѣ зеркала, то полу-

лишь бы 2.36=72 руб.; а онъ получилъ на 42 руб. меньше, потому что разбилъ нѣсколько зеркалъ. Разбивши 1 зеркало, онъ не получаетъ за него двухъ рублей, да еще платитъ самъ 12 руб.; слѣд. каждое, разбитое имъ, зеркало лишаетъ его 14 руб.; а потому зеркалъ было разбито столько, сколько разъ 14 руб. содержатся въ 42 руб., т. е. 42 : 14=3; въ цѣлости же доставлено 36—3=33 зеркала.

14) Торговецъ купилъ 15 цыбиковъ чаю, по 160 фун. въ каждомъ, и 5 бочекъ сахару, по 20 пуд. въ каждой, чай онъ покупалъ по 2 руб. фунтъ, а сахаръ по 8 руб. пудъ, да провозъ товара стоилъ ему 30 руб. Продавши весь товаръ, торговецъ получилъ прибыли по гривеннику на каждый, затраченный имъ рубль. Сколько получено всего прибыли?

Чаю куплено 160×15=2400 фун.; заплачено за него 2.2400=4800 руб.; сахару куплено 20.5=100 пуд., и издержано на него 8.100=800 руб.; слѣд. всего съ перевозкой истрачено 5630 руб., а потому получено прибыли 5630 гривенниковъ, или 563 руб.

15) Бассейнъ можетъ вмѣстить 270 пуд. воды; въ него проведены 3 трубы; если открыть только первую трубу, то бассейнъ наполнится водою въ продолженіе 2 часовъ; черезъ одну вторую трубу онъ наполнился бы въ 90 минутъ; когда же открыты всѣ трубы, то бассейнъ наполняется въ полчаса. Сколько ведеръ воды втекаетъ въ бассейнъ ежеминутно черезъ третью трубу? Въ ведрѣ помѣщается 30 фун. воды; 1 пудъ содержитъ 40 фунтовъ; 1 часъ=60 минутамъ.

Разсчитаемъ, сколько ведеръ воды вмѣщаетъ бассейнъ; такъ какъ 1 пудъ содержитъ 40 фун., то въ 270 пуд. будетъ 40.270=10800 фун.; а ведро воды вѣситъ 30 фун., слѣд. бассейнъ вмѣщаетъ 10800 : 30=360 ведеръ. Первая труба наполняетъ бассейнъ въ 2 часа, т. е. въ 120 мин.; слѣд. въ каждую мин. она даетъ 360 : 120=3 ведра; вторая даетъ въ минуту 360 : 90=4 ведра; а всѣ три трубы наполняютъ бассейнъ въ 30 мин., слѣд. черезъ нихъ втекаетъ въ минуту 360 : 30=12 ведеръ; поэтому одна третья труба даетъ въ минуту 12—(3+4)=5 ведеръ.

16) Заплатить 457 руб. кредитными билетами въ 1 руб., 3, 5 и 10 руб. такъ, чтобы всѣхъ этихъ билетовъ было поровну?

Если взять по одному билету, то получимъ 1+3+5+10=19 руб.; а чтобы вышло 457 руб., нужно взять по 457 : 19=23 билета.

17) Въ лавкѣ были наполнены пшеницей 3 закрома: первый вдвое больше втораго; второй вчетверо больше третьяго; третій вмѣщаетъ пшеницы на 70 четвертей меньше, чѣмъ первый. Сколько четвертей пшеницы было въ лавкѣ?

Если положимъ, что третій закромъ вмѣщаетъ x четвертей, то вмѣстимость втораго $=4x$, а перваго $=8x$ четвертямъ; но, по условію задачи, разность между вмѣстимостью перваго и третьяго закрома=70 четвертямъ; слѣд. $8x-x=70$; или $7x=70$; $x=10$ четвертямъ; второй закромъ вмѣщаетъ 40, первый 80 четвертей; всего же въ лавкѣ 10+40+80=130 четвертей.

18) Сумма трехъ чиселъ=750; третье число въ 7 разъ меньше перваго; а если сумму перваго и третьяго чиселъ раздѣлить на 4, то получимъ второе. Опредѣлить эти числа?

Если третье=x, то первое=$7x$, а второе=$2x$; поэтому $x+7x+$ $+2x=750$, или $10x=750$; $x=75$; второе число=150; первое=525.

19) Въ 8 часовъ утра долженъ былъ выйти со станціи A поѣздъ желѣзной дороги, съ тѣмъ, чтобы въ 11 час. вечера того же дня прибыть на станцію B; но при самомъ отправленіи поѣзда получено было приказаніе, чтобы поѣздъ прибылъ на станцію B въ 7 часовъ вечера, и для этого машинисту велѣно было дѣлать въ часъ 12 верстами больше. Сколько верстъ отъ A до B?

Отъ 8 час. утра до 11 час. вечера проходитъ 15 час.; слѣд. поѣздъ долженъ былъ дойти до B въ 15 час., но вслѣдствіе новаго приказанія, онъ долженъ употребить на проходъ до B только 11 час.; онъ проходитъ въ часъ 12 верстами больше, слѣд. въ 11 час: онъ пройдетъ 132-мя вер. больше; эти 132 версты онъ прошелъ бы въ 4 часа, если бы не было новаго распоряженія; итакъ, поѣздъ долженъ былъ проходить въ часъ по 132 : 4=33 вер., чтобы дойти въ 15 час. до станціи B; слѣд. разстояніе отъ A до B=33 . 15=495 вер.

20) Сумма двухъ чиселъ = 348; раздѣливъ одно число на другое, находимъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 28. Найти эти числа?

Въ суммѣ 348 содержится меньшее число, учетверенное меньшее число и еще 28; стало быть, если вычесть 28 изъ 348, то въ остаткѣ 320 меньшее число содержится 5 разъ; слѣд. оно = 320 : 5 = =64; а большее=64.4+28=284.

21) Тремъ стенографамъ заплачено 296 руб.; первый работалъ 6 дней по 10 час. ежедневно; второй 4 дня по 12 час.; третій 8 дн. по 5 часовъ въ день; сколько выдано каждому, если за часъ работы они получили поровну?

Разсчитаемъ, сколько стоитъ 1 часъ работы; первый стенографъ работалъ 10.6 час., второй 12.4, третій 5.8 час.; слѣд. всѣхъ рабочихъ часовъ было 60+48+40=148, и потому рабочій часъ стоилъ 296 : 148 = 2 руб.; первый стенографъ долженъ получить 2.60=120 руб., второй 2.48=96 руб.; третій 80 руб.

22) Торговецъ имѣлъ нѣсколько штукъ серебряныхъ часовъ; если онъ всѣ ихъ продастъ по 13 руб., то получитъ 54 руб. убытку; а если продастъ по 18 руб., то наживетъ 81 руб. Сколько было часовъ и какой стоимости?

Вторая цѣна больше первой на 5 руб., а выручка больше на 54+81=135 руб.; слѣд. часовъ было 135 : 5=27; продавши всѣ часы по 13 руб., торговецъ получилъ бы 13.27=351 руб.; но при этомъ имѣлъ бы 54 руб. убытку; слѣд. всѣ часы стоили ему 351+54=405 руб., а каждая штука стоила 405 : 27=15 руб.

23) Лавочникъ смѣшалъ три сорта чаю: 7 пуд. перваго сорта по 4 руб. за фунтъ, 148 ф. второго сорта по 80 руб. пудъ и 9 пуд.

третьяго по 1 руб. за фунтъ. Продавъ всю смѣсь, онъ получилъ 200 руб. убытку. Почемъ онъ продавалъ фунтъ смѣшаннаго чаю? Пудъ содержитъ 40 фун.

Вычислимъ, сколько стоитъ вся смѣсь: такъ какъ 7 пудовъ=$=40.7=280$ ф., то первый сортъ стоитъ $4.280=1120$ р.; фунтъ второго сорта стоитъ 2 руб.; слѣдоват. весь второй сортъ стоитъ $2.148=296$ р.; третій сортъ стоитъ 360 р.; а вся смѣсь стоитъ $1120+296+360=1776$ руб.; при продажѣ получено 200 р. убытку, слѣд. 788 фун. смѣшаннаго чаю проданы за 1576 р.; а за фунтъ брали $1576 : 788=2$ руб.

24) Виноторговецъ имѣлъ вино двухъ сортовъ; боченокъ перваго стоилъ 56 руб., а второго 35 руб.; онъ смѣшалъ оба сорта, такъ что боченокъ смѣси обошелся въ 42 р.; перваго сорта взято было 25 боченковъ; сколько было взято 2-го сорта?

Продавая 25 боченковъ перваго сорта по 32 руб., торговецъ получаетъ $14.25=350$ руб. убытку; этотъ убытокъ онъ вознаграждаетъ тѣмъ, что на каждомъ боченкѣ второго сорта имѣетъ 7 руб. прибыли; слѣд. второго сорта надо взять $350 : 7=50$ боченковъ.

25) Остатокъ при дѣленіи двухъ чиселъ$=44$; если бы онъ былъ двумя единицами меньше, то онъ составлялъ бы девятую долю частнаго; а если бы онъ былъ 10-ю меньше, то составлялъ бы половину дѣлителя. Найти дѣлимое и дѣлителя?

Девятая часть частнаго$=42$; все частное$=42.9=378$; половина дѣлителя$=34$; дѣлитель$=68$; дѣлимое$=68.378+44=25748$.

26) Помѣщикъ купилъ домъ и потомъ продалъ его, взявъ на каждые 10 руб. по рублю барыша; изъ полученныхъ денегъ онъ уплатилъ долгъ въ 2655 руб., а на остальныя купилъ въ двухъ мѣстахъ землю и еще лѣсъ; въ одномъ мѣстѣ онъ купилъ 36 десятинъ по 65 руб., въ другомъ вдное больше земли по 69 р.; лѣсу онъ купилъ 43 десят. по 195 р. Сколько онъ заплатилъ за домъ?

Помѣщикъ отдалъ долгу 2655 р.; за землю заплатилъ $65 . 36+$ $+69 . 72=2340+4968=7308$ р.; за лѣсъ $195 . 43=8385$ руб.; слѣд. всего онъ истратилъ $2655+7308+8385=18348$ р. Въ этой суммѣ заключается и то, что помѣщикъ заплатилъ за домъ, и то, сколько онъ получилъ прибыли. Такъ какъ прибыли получено по 1 рублю на каждые 10 руб., то слѣдов. помѣщикъ получилъ за домъ столько разъ 11 руб., сколько онъ самъ заплатилъ десятковъ руб.; 11 въ 18348 содержится 1668 разъ; стало быть за домъ заплачено 1668 десятковъ руб., или 16680 руб.

ГЛАВА III.

СОСТАВНЫЯ ИМЕНОВАННЫЯ ЧИСЛА.

89. Мы видѣли, что надо знать число предметовъ или число явленій, если желаемъ получить понятіе о цѣлой совокупности одно-

родныхъ предметовъ или однородныхъ явленій. Если же въ этой совокупности предметовъ или явленій мы хотимъ получить понятіе о каждомъ отдѣльномъ предметѣ или о каждомъ отдѣльномъ явленіи, то надо разсмотрѣть, одинаковы ли предметы или явленія въ своихъ свойствахъ, или же они отличаются нѣкоторыми свойствами другъ отъ друга. Такъ напр., имѣя нѣсколько столовъ и желая узнать, одинаковы ли они или нѣтъ, мы должны опредѣлить, будетъ ли длина ихъ одна и та же, или нѣтъ; будетъ ли поверхность всѣхъ одинакова, или же поверхность однихъ больше, чѣмъ другихъ, и т. п. Или напр., имѣя нѣсколько хлѣбовъ, мы должны узнать, одинаковъ ли вѣсъ ихъ, или нѣтъ; одинакова ли цѣна ихъ, и т. под. Наблюдая нѣсколько качаній маятника и желая узнать, отличается ли одно качаніе отъ другого, мы должны опредѣлить наприм., одинаково ли время, употребляемое маятникомъ на каждое качаніе, или на одно качаніе маятникъ употребляетъ больше времени, чѣмъ на другое. Вообще, чтобы составить полное, ясное понятіе о каждомъ отдѣльномъ предметѣ или явленіи, надо точно опредѣлить всѣ такія его свойства, которыя могутъ быть больше или меньше, какъ-то длину, поверхность, объемъ, вѣсъ, цѣну и проч. въ предметахъ; время и проч.—въ явленіяхъ. *Все, что въ предметахъ или явленіяхъ можетъ быть больше или меньше и что можетъ быть опредѣлено съ точностью, наз. величиною.*

Примѣч. Есть нѣкоторыя свойства, напр. умъ, храбрость, доброта, радость и т. п., которыя, хотя бываютъ больше или меньше, не могутъ быть названы математическими величинами, потому что не могутъ быть точно опредѣлены. Такъ напр., мы можемъ сказать, что одинъ человѣкъ умнѣе другого, но не можемъ опредѣлить, во сколько разъ онъ умнѣе.

90. Положимъ, что мы хотимъ получить понятіе о длинѣ какого-нибудь предмета, напр. стола; мы беремъ для этого другую какую-нибудь длину, напр. длину линейки, и сравниваемъ длину стола съ длиной линейки, накладывая эту послѣднюю по длинѣ стола, сколько придется. Если линейка уложится вдоль стола ровно 7 разъ, то длина стола въ 7 разъ больше длины взятой линейки, или длина стола равна длинѣ 7 линеекъ, равныхъ взятой линейкѣ и сложенныхъ конецъ съ концомъ. Такимъ образомъ, имѣя понятіе о линейкѣ, мы будемъ имѣть точное понятіе о длинѣ стола.

Вообще, чтобы получить точное понятіе о какой-нибудь величинѣ, ее надо сравнить съ другой, однородной ей, величиной. *Сравненіе всякой величины съ другою однородною наз. измѣреніемъ.*

Величина, съ которой сравниваютъ другую, наз. *единицею* или *мѣрою. Результатъ измѣренія, показывающій, сколько разъ единица содержится въ измѣряемой величинѣ, выражается числомъ.*

91. Если единица содержится въ измѣряемой величинѣ ровно нѣсколько разъ, напр. линейка укладывается по длинѣ стола 5 разъ, то

результатъ измѣренія выражается *цѣлымъ числомъ*—5. Но если бы линейка уложилась по длинѣ стола 5 разъ и еще остался остатокъ, на которомъ линейка вся не можетъ уложиться, то надо бы было раздѣлить линейку на нѣсколько равныхъ частей, напр. на 4, и смотрѣть, сколько такихъ частей уложится въ остаткѣ. Если бы такихъ частей въ остаткѣ уложилось три, то длина стола равнялась бы длинѣ 5 линеекъ и трехъ четвертыхъ частей линейки, или короче=пяти и тремъ четвертямъ линейки. Итакъ, если единица будетъ содержаться въ величинѣ нѣсколько разъ и останется еще остатокъ, въ которомъ цѣлая единица не можетъ содержаться, то раздѣляютъ единицу на нѣсколько равныхъ частей и смотрятъ, сколько разъ одна такая часть заключается въ остаткѣ. Результатъ измѣренія будетъ выраженъ въ этомъ случаѣ *цѣлымъ числомъ съ дробью*.

Наконецъ, если измѣряемая величина будетъ меньше самой единицы, то ее прямо сравниваютъ съ какою-нибудь частью единицы, и результатъ измѣренія будетъ выраженъ въ этомъ случаѣ *дробью*.

92. Такъ какъ для измѣренія какой-нибудь величины, можетъ быть принята за единицу всякая другая величина, *однородная съ измѣряемой*, то всякая величина можетъ быть выражена различными числами, и потому объ ней нельзя составить яснаго понятія до тѣхъ поръ, пока не будетъ извѣстна сама единица. Напр. если кто-нибудь, измѣряя длину стола своей линейкой, найдетъ, что она равна 8 линейкамъ; а другой, измѣряя длину такого же стола другой линейкой, найдетъ ее равною 10 своимъ линейкамъ,—то не зная того, что ихъ мѣры различны, они могутъ думать, что длины ихъ столовъ не одинаковы, до тѣхъ поръ, пока не измѣрятъ ихъ одной и той же линейкою. Чтобы не происходило такихъ недоразумѣній, во всѣхъ государствахъ для измѣренія различныхъ величинъ существуютъ *постоянныя*, *утвержденныя закономъ*, *единицы*, которыя собственно мы и будемъ называть *мѣрами*, оставляя названіе *единицы* для всякой величины, съ которой сравниваютъ другую однородную. Мѣръ однородныхъ во всякомъ государствѣ есть нѣсколько; самая большая изъ нихъ дѣлится на нѣсколько равныхъ частей, которыя составляютъ *мѣры низшаго названія* относительно предыдущей; эти въ свою очередь дѣлятся на мѣры еще меньшія и т. д. Число, которое показываетъ, сколько мѣръ низшаго названія содержитъ въ себѣ какая-нибудь мѣра, наз. *единичнымъ отношеніемъ* этихъ мѣръ; такъ напр. единичное отношеніе пуда къ фунту есть 40.

93. Мѣры, употребляемыя въ Россіи.

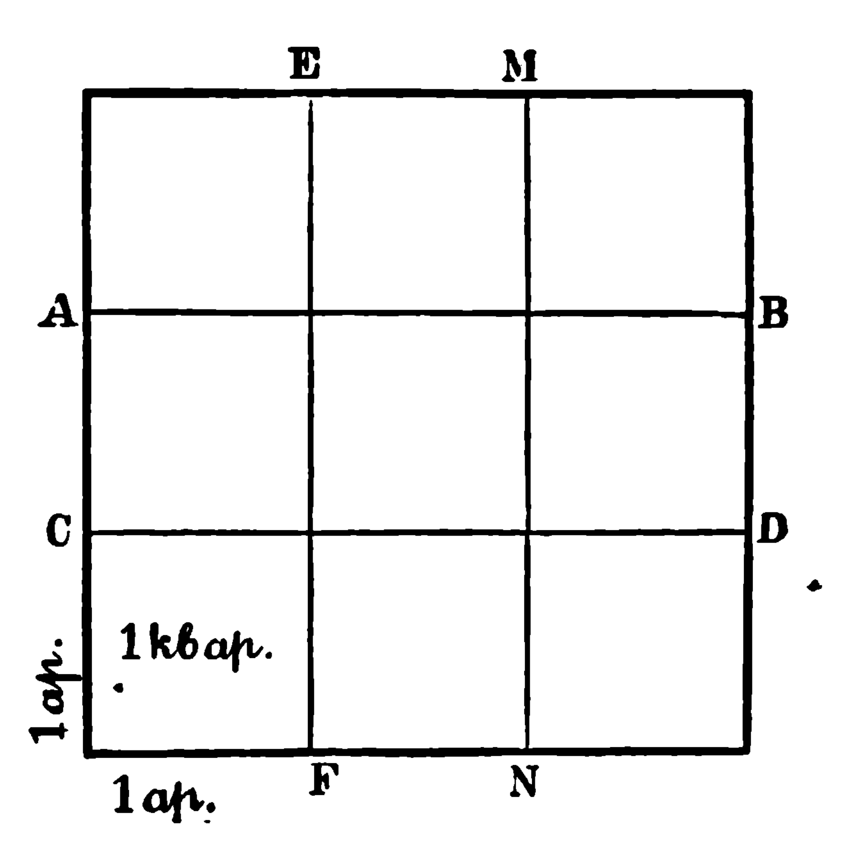
Мѣры линейныя. Линейныя мѣры, т. е. служащія для измѣренія длины, ширины, вышины, суть слѣдующія:

Географическая миля содержитъ 7 верстъ;
верста . . . . 500 саженъ;

сажень	3 аршина;
аршинъ.	16 вершковъ;
или сажень	7 футовъ;
футъ	12 дюймовъ;
дюймъ .	10 линій.

Мѣры поверхностей. Для измѣренія поверхностей употребляются *квадратныя мѣры*. *Квадратомъ* назыв. такой четыреугольникъ, у котораго всѣ четыре стороны суть равныя прямыя линіи и всѣ углы равны между собою, какъ это видно на приложенномъ чертежѣ. Начертамъ квадратъ на листѣ бумаги. Такой квадратъ будетъ представлять *квадратную площадь*.

Всѣ мѣры поверхностей суть *квадратныя площади* и различаются только длиною сторонъ; если каждая сторона будетъ=сажени, то такая квадратная площадь назыв. *квадратною саженью*; если каждая сторона=арш., то площадь наз. *квадратнымъ аршиномъ*, и т. д., Чтобы измѣрнть какую-нибудь поверхность, напр. поверхность пола, надо накладывать на нее квадр. мѣру, напр. квадр. саж. или квадр. арш., и сосчитать, сколько разъ она уложилась. Въ геометріи предлагаются способы, какъ узнать, не дѣлая такого наложенія, сколько разъ какая-нибудь квадр. мѣра содержится въ измѣряемой поверхности.

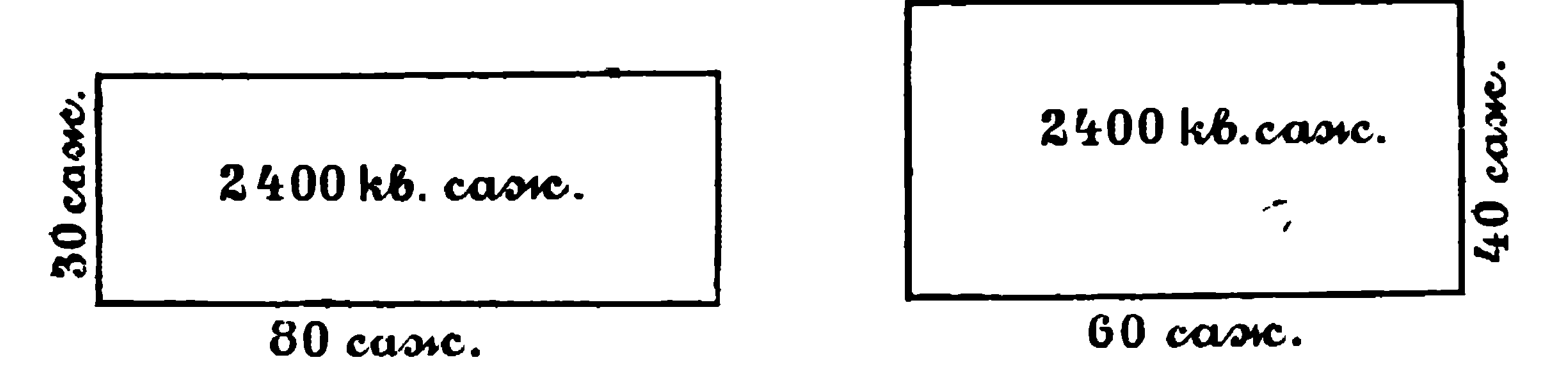


Положимъ, что у квадрата, представленнаго на чертежѣ, каждая сторона=сажени; слѣд. этотъ квадратъ будетъ квадр. сажень. Раздѣлимъ правую и лѣвую стороны этого квадрата на 3 равныхъ части—каждая такая часть будетъ=аршину—и проведемъ прямыя линіи между точками дѣленія *A* и *B*, *C* и *D*; тогда квадр. сажень раздѣлится на 3 полосы, имѣющихъ каждая въ длину 1 саж., а въ ширину 1 арш. Если теперь раздѣлимъ верхнюю и нижнюю стороны квадрата также на 3 равныхъ части и соединимъ точки *E* и *F*, *M* и *N* прямыми линіями, то каждая полоса разобьется на 3 квадр. арш., и такъ какъ полосъ было 3, то въ квадр. саж. содержится 3.3=9 квадр. арш. Такимъ же образомъ найдемъ, что

	кв. миля содержитъ	7.7=49 кв. верстъ;
	кв. верста. . .	. 500.500=250000 кв. саж.;
	кв. сажень. . .	3.3=9 кв. арш.
	кв. аршинъ.	. 16.16=256 квадр. вершк.;
или	кв. сажень .	7.7=49 кв. фут.;
	кв. футъ . .	. 12.12=144 кв. дюйм.;
	кв. дюймъ. . .	10.10=100 кв. лин.

Вообще, чтобы найти единичное отношеніе двухъ квадратныхъ мѣръ, надо единичное отношеніе соотвѣтствующихъ линейныхъ мѣръ умножить само на себя, или взять два раза множителемъ. Иначе говоря (см. § 55), *единичное отношеніе двухъ квадратныхъ мѣръ равно квадрату единичнаго отношенія соотвѣтствующихъ линейныхъ мѣръ.*

Для измѣренія полей употребляется мѣра, наз. *десятиною*, содержащая 2400 кв. саженъ. Она имѣетъ видъ прямоугольника, т. е. такого четыреугольника, у котораго углы всѣ между собою равны какъ у квадрата, но длина не равна ширинѣ (какъ это видно на чертежѣ).



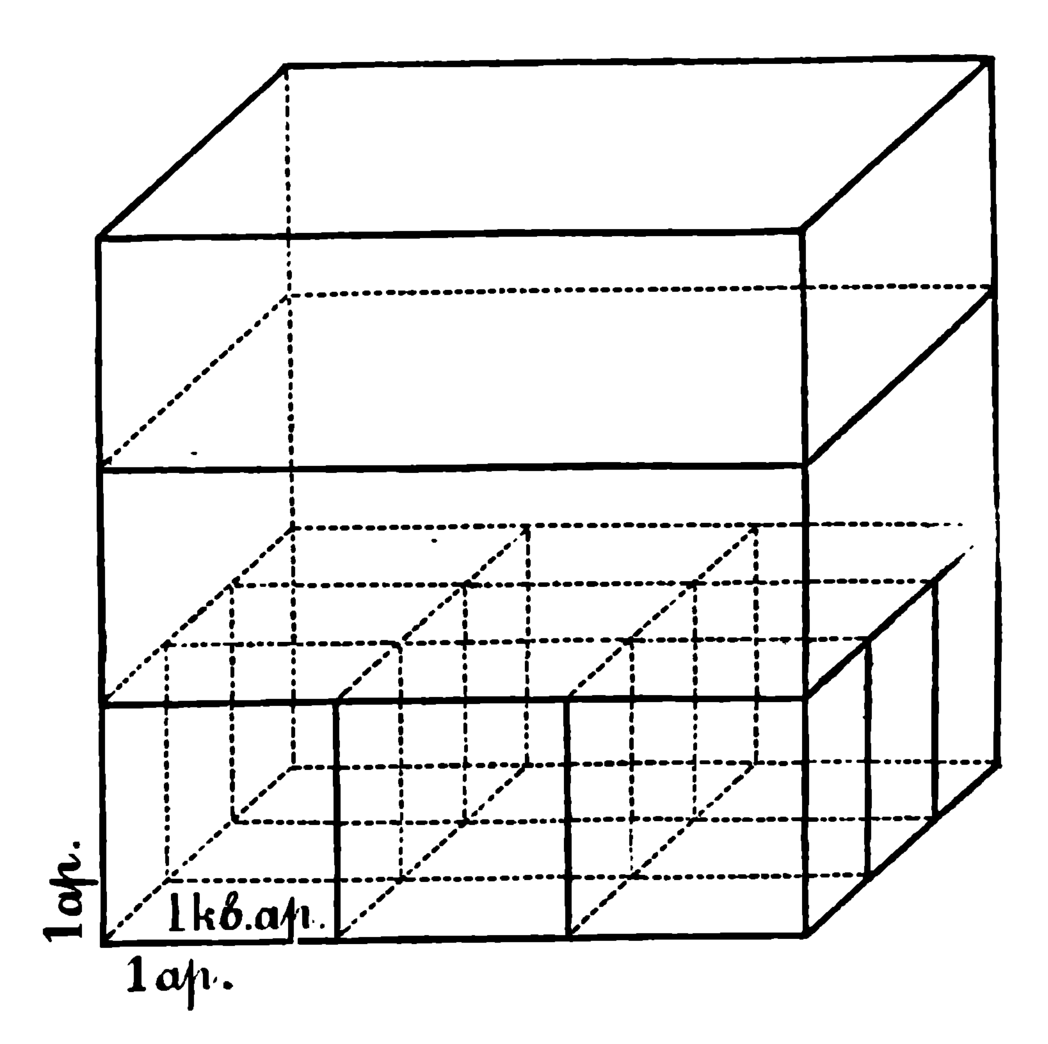
Десятины бываютъ двухъ родовъ: однѣ имѣютъ 80 саж. въ длину и 30 въ ширину; другія 60 саж. въ длину и 40 въ ширину.

Та и другая десятина содержитъ 2400 кв. саженъ. Дѣйствительно, если раздѣлимъ лѣвую и правую стороны перваго прямоугольника на 30, а второго на 40 равныхъ частей и соединимъ точки дѣленія прямыми линіями, то первая десятина раздѣлится на 30 полосъ, имѣющихъ въ длину 80 саж., а въ ширину 1 саж., вторая же на 40 полосъ, имѣющихъ въ длину 60 саж., а въ ширину 1 сажень. Раздѣлимъ теперь верхнюю и нижнюю сторону первой десятины на 80 равныхъ частей, а верхнюю и нижнюю сторону второй на 60 равныхъ частей, и соединимъ точки дѣленія прямыми линіями. Тогда каждая полоса первой десятины разобьется на 80 квадр. саженъ, и какъ полосъ было 30, то во всей десятинѣ помѣстится 80.30=2400 квадр. саженъ. Во второй же десятинѣ каждая полоса разобьется на 60 кв. саженъ, и какъ полосъ было 40, то во всей десятинѣ будетъ 60.40, или 2400 кв. саж.

Кромѣ этихъ двухъ десятинъ, назыв. *казенными*, есть еще десятина, наз. *сороковою*, а также *хозяйственною* или *экономическою*. Она представляетъ прямоугольникъ въ 80 саженъ длины и 40 саж. ширины и равна 80.40=3200 кв. саж.

Мѣры объемовъ. Для измѣренія объемовъ тѣлъ употребляются мѣры, наз. *кубическими*, потому что онѣ имѣютъ форму *куба*. *Кубомъ* наз. тѣло, имѣющее видъ ящика, ограниченнаго 6-ю равными квадратами. Каждый квадратъ съ сосѣднимъ пересѣкается по прямой линіи, которая наз. *ребромъ*. Всѣ 12 реберъ куба равны между собою и служатъ сторонами квадратовъ, ограничивающихъ его, какъ вто можно видѣть изъ приложеннаго чертежа.

Кубъ, у котораго каждое ребро есть сажень, и слѣд. у котораго каждая сторона есть квадр. саж., наз. *кубическою саженью*. Кубъ, у котораго каждое ребро=аршину, и слѣдов. каждая сторона есть квадр. арш., назыв. *кубич. аршиномъ*, и т. под. Чтобы измѣрить объемъ напр. комнаты, надо узнать, сколько разъ помѣщается въ ней кубическая мѣра, наприм. куб. аршинъ. Въ геометріи даются способы узнать это, не дѣлая самаго помѣщенія.



Представимъ себѣ кубическій ящикъ, у котораго каждое ребро==сажени; слѣд. это будетъ кубич. саж. Дно этого ящика будетъ квад. саж., которую, мы знаемъ, можно раздѣлить на 9 кв. арш.; слѣд. на это дно можно поставить 9 куб. арш., такъ что каждый нижней своей стороной будетъ закрывать соотвѣтствующій квадр. арш. дна. Но весь слой изъ этихъ 9 куб. арш. будетъ имѣть въ вышину только 1 арш., т. е. третью часть всей вышины ящика; поэтому на него можно помѣстить еще слой изъ 9 куб. арш., потомъ еще такой же слой, и только тогда вся куб. саж. наполнится. Слѣд. куб. сажень содержитъ 9.3, или 3.3.3=27 кубич. арш. Подобнымъ образомъ найдемъ, что

куб. миля содержитъ 7.7.7=343 куб. версты;
куб. верста 500.500.500=125000000 куб. саж.;
куб. сажень . . 3.3.3=27 куб. аршинъ;

куб. аршинъ . . 16.16.16=4096 куб. вершковъ;
или куб. сажень . . 7.7.7=343 куб. фута;
куб. футъ . . 12.12.12=1728 куб. дюймовъ;
куб. дюймъ . 10.10.10=1000 куб. саж.

Вообще, чтобы найти единичное отношеніе двухъ кубическихъ мѣръ, надо единичное отношеніе соотвѣтствующихъ мѣръ длины взять множителемъ 3 раза. Иначе говоря (см. § 55), *единичное отношеніе двухъ кубическихъ мѣръ равно кубу единичнаго отношенія соотвѣтствующихъ линейныхъ мѣръ.*

Мѣры торговаго вѣса. Берковецъ содержитъ 10 пудовъ;
пудъ . . 40 фунтовъ;
фунтъ . 32 лота или 96 золотниковъ;
лотъ . 3 золотника;
золотникъ . 96 долей.

Русскій фунтъ есть вѣсъ 25 куб. дюймовъ перегнанной воды при температурѣ наибольшей ея плотности ($3^0,2$ по термометру Реомюра или 4^0 по стоградусному терм., т. е. по терм. Цельсія).

Мѣры аптекарскаго вѣса. Аптекарскій фунтъ (℔j) содержитъ 12 унцій (около 84 золотниковъ).
унція (℥j) . . 8 драхмъ;
драхма (ʒj) . . 3 скрупула;
скрупулъ (℈j) . . . 20 гранъ (gr).

Прим. Теперь въ аптекахъ вводится десятичный вѣсъ.

Мѣры жидкостей. Бочка содержитъ 40 ведеръ;
ведро . . . . 10 штофовъ;
штофъ . . 2 полуштофа, или 2 кружки.

Ведро есть цилиндрическій сосудъ, объемъ котораго равенъ 750 куб. дюймамъ; слѣд. въ немъ помѣщается 30 фунтовъ чистой воды.

Мѣры зерноваго хлѣба. Ластъ содержитъ 12 четвертей, или кулей;
четверть . . . 8 четвериковъ (или мѣръ);
четверикъ . . . 8 гарнцевъ;
или четверть имѣетъ 2 осьмины;
осьмина . 4 четверика;
четверикъ . . . 4 четвертки;
четвертка 2 осьмушки (или 2 гарнца).

Четверикъ есть цилиндрическій сосудъ, содержащій 1600 куб. дюйм. и равняющійся $2^2/_{15}$ ведра.

Мѣры бумаги. Стопа содержитъ 20 дестей;
десть . 24 листа.

Монеты. Въ Россіи находятся въ обращеніи монеты *серебряныя, золотыя и мѣдныя.* Государственная россійская монетная единица есть *серебряный рубль*, раздѣляющійся на *сто копѣекъ* и содержащій въ себѣ 4 золотника 21 долю чистаго серебра.

Изъ серебра чеканятся:

Рубль (или цѣлковый) содержитъ 2 полтины или 100 коп.;

полтина . . . 2 четвертака или 50 коп.;
четвертакъ. . 25 коп.;
двугривенный . 20 коп.;
пятиалтынный . . . 15 коп.;
гривенникъ . . 10 коп.;
пятачекъ . 5 коп.

Золотыя монеты до 1897-го года чеканились въ 10 рублей (имперіалъ) и въ 5 рублей (полуимперіалъ); теперь же цѣнность первой монеты опредѣлена въ 15 рублей, а второй въ 7 руб. 50 коп.

Мѣдныя монеты чеканятся въ 5, 3, 2, 1 копѣйку, въ полкопѣйки (денежка) и въ четверть копѣйки (полушка).

Чистое золото и серебро не употребляются ни на монету, ни на издѣлія, потому что они мягки, и вещь, сдѣланная изъ чистаго золота или серебра, скоро стиралась бы и слѣд. теряла бы свою цѣну. Чтобы сдѣлать золото и серебро болѣе твердыми, ихъ сплавляютъ съ мѣдью, свинцомъ и другими металлами. Такое серебро и золото наз. лигатурными. Золотая и серебряная *полноцѣнн*ая монета чеканится изъ такихъ сплавовъ, которые на каждую тысячу частей содержатъ 900 частей чистаго серебра или золота и 100 частей мѣди. Золотая монета чеканится только полноцѣнная. Имперіалъ вѣситъ 3 зол. 2,4 доли и содержитъ въ себѣ 2 зол. 69,36 долей чистаго золота; полуимперіалъ вѣситъ 1 зол. 49,2 доли и содержитъ въ себѣ 1 зол. 34,68 доли чистаго золота. Изъ фун. лигатурнаго золота должно выходить 63 полуимперіала 2 р. и $35^{65}/_{121}$ к. Полноцѣнная серебряная монета чеканится въ рубль, въ 50 в. и въ 25 в. Рубль вѣситъ 4 зол. 66 долей и, какъ выше сказано, заключаетъ въ себѣ 4 зол. 21 долю чистаго серебра. Изъ фунта лигатурнаго серебра должно выходить 20 руб. 48 коп. Кромѣ полноцѣнной чеканится размѣнная монета, предназначаемая исключительно для внутренняго обращенія (т. е. такая монета обращается только въ Россіи) въ дополненіе въ монетѣ полноцѣнной. Размѣнная монета чеканится серебряная и мѣдная. Размѣнная серебряная монета чеканится въ 20, 15, 10, 5 копѣекъ и содержитъ въ себѣ 500 частей чистаго серебра и 500 частей мѣди. Изъ пуда такого лигатурнаго серебра чеканится 910 рублей $22^{6}/_{37}$ копѣйки. Размѣнная мѣдная монета чеканится по пятидесяти рублей изъ пуда мѣди. Кромѣ упомянутыхъ выше золотыхъ монетъ, прежде чеканились червонцы въ 3 рубля каждый, но въ дѣйствительности каждый цѣнился въ 3 руб. 9 коп.

Кромѣ монетъ, или *металлическихъ денегъ*, имѣются еще бумажныя деньги, или *государственные кредитные билеты*: въ 100 р., въ 50 руб., въ 25 руб., въ 10 руб., въ 5 руб., въ 3 руб. и въ 1 рубль.

Мѣры времени. Вѣкъ содержитъ 100 лѣтъ;
годъ простой 365, а високосный 366 дней,
или 12 мѣсяцевъ;
мѣсяцъ . . 30 сутокъ или 4 недѣли;

недѣля.	7	сутокъ;
сутки .	24	часа;
часъ	60	минутъ;
минута.	60	секундъ.

Сутками или *днемъ* наз. *время, въ теченіе котораго земля дѣлаетъ полный оборотъ около своей оси.*

Сутки начинаются въ полночь; онѣ содержатъ 24 часа, и часы считаются такимъ образомъ: отъ полуночи до полудня 12 часовъ—эти часы наз. часами *пополуночи*; потомъ отъ полудня до полуночи еще 12 часовъ—эти часы наз. часами *пополудни*.

Годомъ наз. *время, въ продолженіе котораго земля совершаетъ полный оборотъ вокругъ солнца.* Годъ содержитъ 365 дн. 5 ч. 48 м. 46 с. Такимъ числомъ нельзя пользоваться въ общежитіи, потому что пришлось бы начинать годъ въ различные часы дня; если напр. 1895-й годъ начался съ полночи перваго января, то слѣдующій годъ нужно бы начать не въ полночь, а въ 5 час. 48 мин. 46 сек. утра; 1897-й еще на 5 ч. 48 мин. 46 сек. позже, и т. д. Если же отбросить доли сутокъ и считать годъ ровно въ 365 сут., то каждый годъ будетъ короче истиннаго почти на четверть сутокъ, такъ что будетъ считаться начало новаго года, хотя еще осталось почти 6 часовъ стараго; въ 100 лѣтъ эта ошибка возрастетъ до 25 дней, и потому весна, которая начинается въ мартѣ, черезъ 100 лѣтъ придется уже въ февралѣ; черезъ 500 лѣтъ она пришлась бы въ октябрѣ, такъ что тогда октябрь, ноябрь, декабрь были бы весенними мѣсяцами. Поэтому, для соглашенія точности счисленія времени съ удобствомъ, остается одно средство—*считать годъ состоящимъ изъ цѣлаго числа сутокъ и отъ времени до времени исправлять накопившуюся ошибку.* Въ 45-мъ году по Р. Х. Юлій Цезарь положилъ считать въ году 365 сутокъ, но къ каждому четвертому году прибавлять по одному лишнему дню; три года, содержащіе по 365 сут., наз. *простыми*, а четвертый въ 366 сутокъ *високоснымъ* *); лишнія сутки въ немъ прибавляются къ февралю, который въ простомъ году содержитъ 28, а въ високосномъ 29 дней. Такъ какъ годъ, отъ котораго мы ведемъ наше лѣтосчисленіе, т.-е. годъ, въ концѣ котораго (25 декабря) родился Іисусъ Христосъ, былъ високосный, то слѣд. 4-й, 8-й, 12-й и т. д. года по Р. Х. были високосными, и вообще *всѣ года, дѣлящіеся безъ остатка на 4, суть високосные.* По этому счисленію, которое наз. *юліанскимъ*, годъ принимается равнымъ 365 дн. 6 ч.; на самомъ же дѣлѣ онъ содержитъ 365 дн. 5 час. 48 мин. 46 сек.; поэтому юліанскій годъ слишкомъ на 11 мин. больше истиннаго; т.-е. когда по юліанскому календарю считаютъ, что годъ только что кончился, то про-

*) Слово високосный есть испорченное латинское слово bissextiiis.

шло уже 11 мин. слишкомъ новаго года; эта ошибка въ 400 лѣтъ возрастатъ до трехъ сутокъ.

На первомъ Вселенскомъ Соборѣ, бывшемъ въ 325-мъ году по Р. Х. въ г. Никеѣ, юліанскій календарь былъ принятъ Христіанскою Церковью, и была исправлена ошибка, накопившаяся къ этому времени, но не была устранена причина ея, такъ что черезъ 1257 лѣтъ послѣ Никейскаго собора, т.-е. въ 1582 г., ошибка опять возрасла до 10 дней*). Поэтому папа Григорій XIII приказалъ въ 1582 г. пропустить 10 дней, а именно послѣ 4-го октября считать не 5-е, а 15-е; съ тѣмъ вмѣстѣ, чтобы устранить погрѣшность и на будущее время, приняты были тѣ же високосные года, какъ и въ юліанскомъ счисленіи, съ тою только разницей, что въ юліанскомъ календарѣ всѣ года столѣтій, т. е. оканчивающіеся двумя нулями, напр. 1500, 1600, 1700..., какъ дѣлящіеся безъ остатка на 4, суть високосные; а въ григоріанскомъ только тѣ изъ нихъ високосные, у которыхъ *первыя двѣ цыфры дѣлятся безъ остатка на 4*. Такимъ образомъ разность въ счетѣ времени въ 16-мъ столѣтіи была 10 дней (т.-е. по юліанскому календарю считали 1-е января, а по григоріанскому 11-е); въ 17-мъ столѣтіи эта разность осталась та же, потому что 1600-й годъ былъ високоснымъ въ обѣихъ системахъ; но 1700-й годъ былъ уже не високосный по григоріанскому календарю—по юліанскому считали 29 февраля, по григоріанскому же послѣ 28-го февраля считали 1-е марта, и разность стала 11 дней; въ настоящее время она составляетъ 12 дней, такъ что когда по юліанскому календарю считаютъ, напр., 3-е марта, то по григоріанскому—15-е. Григоріанское счисленіе, или *новый стиль*, принято во всей Европѣ, кромѣ Россіи и Греціи, гдѣ слѣдуютъ юліанскому, или *старому* стилю.

По григоріанскому счисленію 400 лѣтъ состоятъ изъ 303 простыхъ и 97 високосныхъ; слѣд. 400 лѣтъ=365.303+366.97=146097 сутокъ; а потому 1 годъ=146097 : 400=365,2425 сут., что превышаетъ величину года (365,2422) на 0,0003 сут.; т. е. эта погрѣшность въ 10000 лѣтъ возрастаетъ до 3 сутокъ, или въ 3300 лѣтъ составитъ почти однѣ сутки.

Совершенно вѣрнаго лѣтосчисленія быть не можетъ, ибо *годъ несоизмѣримъ съ сутками*, и величина его выражается безконечной непе_ріодической дробью 365,2422008... сут. Наиболѣе точное лѣтосчисленіе предложено астрономомъ Медлеромъ; оно состоитъ въ томъ, чтобы изъ каждыхъ 128 юліанскихъ лѣтъ одинъ високосный годъ дѣлать простымъ. Такимъ образомъ въ 128 годахъ будетъ 31 високосный и 97 простыхъ, слѣд. 128 лѣтъ=366.31+365.97 сут.; а 1 годъ=365,24218 сут.; поэтому ошибка будетъ 0,00002, т. е. возрастетъ до однѣхъ сутокъ только въ 50000 лѣтъ.

Мѣсяцемъ наз. время обращенія луны около земли, и такъ какъ оно продолжается 29 дней 12 часовъ 44 минуты 3 секунды, то

*) Если умножить 11 мин. 14 сек. на 1257, то выйдетъ почти 10 дней.

круглымъ числомъ считаютъ въ мѣсяцѣ 30 дней. Но въ году 12 мѣсяцевъ, я, считая каждый мѣсяцъ по 30 дней, получили бы только 360 дней; поэтому мѣсяцы имѣютъ различное число дней, а именно: январь имѣетъ 31 день, февраль 28 въ простомъ и 29 въ високосномъ году, мартъ 31, апрѣль 30, май 31, іюнь 30, іюль 31, августъ 31, сентябрь 30, октябрь 31, ноябрь 30 и декабрь 31 день.

94. Метрическая система. Во Франціи съ начала нынѣшняго столѣтія введена замѣчательная простотой единичныхъ отношеній *метрическая система* мѣръ, названная такъ потому, что въ ней всѣ мѣры (кромѣ мѣръ времени) зависятъ отъ одной линейной мѣры, наз. *метромъ*.

Чтобы получить естественную, неизмѣнную мѣру длины, нельзя взять ее произвольно, потому что, не говоря уже о томъ, что нормальный образецъ мѣры можетъ затеряться, нельзя поручиться за то, что, сохранившись въ теченіе долгаго періода времени, онъ не потерпитъ никакихъ измѣненій или порчи, и потому коммиссія французскихъ ученыхъ (Борда, Лапласъ, Лагранжъ, Кондорсе и Мовжъ), которой поручено было составить новую систему мѣръ, предложила взять мѣру длины изъ природы; именно приняла за мѣру длины *одну десятимилліонную часть четверти Парижскаго меридіана* *); эта мѣра и наз. *метромъ*. Всѣ остальныя мѣры составлены изъ метра на основаніи десятичной системы, т. е. каждая мѣра болѣе слѣдующей за ней въ 10 разъ. При этомъ принято для составленія названій мѣръ, большихъ метра, прибавлять къ названію главной мѣры греческія названія: *дека*—десять, *гекто*—сто, *кило*—тысяча, *миріа*—10000; а для мѣръ меньшихъ—латинскія: *деци*—одна десятая, *центи*—одна сотая, *милли*—одна тысячная. Такимъ образомъ составлены слѣдующія линейныя мѣры:

Метръ $= 22^1/_2$ вершкамъ $= 1,4$ арш.; декаметръ $= 10$ метр.; гектометръ $= 100$ метр.; километръ $= 1000$ метрамъ $= {}^{14}/_{15}$ версты; миріаметръ $= 10000$ метр.; дециметръ $= 0,1$ метр.; центиметръ $= 0,01$ метр., миллиметръ $= 0,001$ метра $= {}^{2}/_{5}$ линіи.

Мѣры поверхностей суть квадратный метръ $= 100$ кв. дециметр. $= 10000$ кв. центиметр. $= 1000000$ кв. миллиметровъ. Для измѣренія полей принятъ за единицу *аръ* $= 1$ квадр. *декаметру*; кромѣ него есть *гектаръ* $= 100$ арамъ (приблизительно 0,9 десятины), *миріаръ* $= 10000$ арамъ и *центіаръ* = одной сотой долѣ ара, или 1 квадр. метру.

Для измѣренія объемовъ употребляются кубическія мѣры, соотвѣтствующія мѣрамъ длины; т. е. главная единица объемовъ есть кубическій метръ (приблизительно 0,1 куб. саж.); за нимъ слѣдуетъ кубич. дециметръ $= {}^1/_{1000}$ куб. метра; кубич. центиметръ $= {}^1/_{1000000}$ куб. метра, и т. д.

Когда дѣло идетъ объ измѣреніи объемовъ строительныхъ матеріаловъ или топлива, то главная единица, или кубическій метръ, наз. *стеромъ*; употребляютъ еще *декастеръ* $= 10$ стерамъ, и *децистеръ*, равный одной десятой доли стера.

Для измѣренія жидкостей и зернового хлѣба главная единица есть

---

*) Меридіаномъ наз. кругъ, проходящій черезъ полюсы и какое-нибудь мѣсто земли.

митръ (цилиндрическій сосудъ, котораго высота = 1,7206 децим., а діаметръ основ. вдвое меньше), равный одному кубическому дециметру; части его — *децилитръ*$=\frac{1}{10}$ литра и *центилитръ*$=\frac{1}{100}$ *литра*; мѣры, большія литра, суть *декалитръ* =10 и *гектолитръ*=100 литр.

За единицу вѣса принятъ *граммъ*=вѣсъ кубическаго центиметра чистой воды при температурѣ ея наибольшей плотности (3°,2 R или 4°C); граммъ нѣсколько меньше $\frac{1}{4}$ золотника, именно=0,2344 золотника; *декаграммъ*=10 грам.; *гектограммъ*=100 грам.; *килограммъ*= 1000 грам. (2,4 фунт.); *миріаграммъ*=10000 грам.=$\frac{3}{5}$ пуда; *дециграммъ* = 0,1 грамма; *центиграммъ* = 0,01 грамма; *миллиграммъ*= 0,001 грамма. Тысяча килогр. составляютъ *тонну* (61 пудъ съ небольшимъ).

Монетная единица есть *франкъ*—серебряная монета, вѣсомъ въ 5 граммовъ, содержащая 9 частей чистаго серебра и 1 часть лигатуры. Десятая доля франка назыв. *десимомъ*, а сотая *сантимомъ*. По содержанію серебра франкъ почти равенъ нашему четвертаку. Монета въ 5 сантимовъ (или $\frac{1}{20}$ франка) наз. *су*.

95. Простыя и составныя именованныя числа. Такъ какъ для измѣренія одной и той же величины существуетъ нѣсколько мѣръ, то результатъ измѣренія можетъ быть выраженъ или въ мѣрѣ только одного названія, или въ однородныхъ мѣрахъ разнаго названія. Такъ напр., если бы, измѣряя длину комнаты аршиномъ, нашли, что аршинъ уложился по длинѣ комнаты 6 разъ, то получили бы число, выраженное въ одной мѣрѣ. Такое число наз. *простымъ именованнымъ числомъ*. Если же, при измѣреніи комнаты аршиномъ, сверхъ 6 аршинъ остался бы остатокъ, меньшій аршина, и, измѣряя его вершкомъ, мы нашли бы, что вершокъ содержится въ немъ 12 разъ, то длина комнаты выразилась бы числомъ 6 аршинъ 12 вершковъ. Такое число наз. *составнымъ именованнымъ числомъ*.

Чтобы написать составное именованное число, пишутъ отдѣльно числа одно за другимъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ слѣдуютъ мѣры, въ которыхъ эти числа выражены, и послѣ каждаго числа пишутъ названіе тѣхъ мѣръ, въ которыхъ оно выражено. Иногда также отдѣляютъ числа другъ отъ друга знакомъ +. Напр. двадцать пять пудовъ, восемь фунтовъ, четыре лота надо написать такъ: 25 пуд. 8 фун. 4 лота или 25 пуд.+8 фун.+4 лота.

96. Вопросы. 1) Что наз. величиною? 2) Что значитъ измѣрить величину? 3) Что наз. единицею или мѣрою? 4) Какъ выражается результатъ измѣренія? 5) Въ какомъ случаѣ результатъ измѣренія выражается цѣлымъ числомъ? дробью? цѣлымъ числомъ съ дробью? 6) Что наз. единичнымъ отношеніемъ двухъ мѣръ? 7) Перечислить линейныя мѣры? мѣры поверхностей? объемовъ? 8) Какая зависимость существуетъ между единичными отношеніями двухъ линейныхъ мѣръ и соотвѣтствующихъ имъ квадратныхъ мѣръ? кубическихъ? 9) Назвать мѣры вѣса торговаго? вѣса аптекарскаго? мѣры жидкостей? зерновою хлѣба?

бумаги? денегъ? 10) Назвать мѣры времени? 11) Что наз. сутками? мѣсяцемъ? годомъ? 12) Какая ошибка произошла бы, если бы считали всѣ года по 365 дней? 13) Почему неудобно считать годъ въ 365 д. 5 ч. 48 мин. 46 сек.? 14) Что наз. юліанскимъ лѣтосчисленіемъ? 15) Какъ узнать, есть ли данный годъ простой или високосный по юліанскому календарю? 16) Въ чемъ состоитъ григоріанское лѣтосчисленіе? 17) Какіе изъ годовъ 1896, 1900, 1925, 2000 будутъ високосными по старому стилю? по новому? 18) Какое число считается въ Западной Европѣ, когда у насъ 3 мая? 24 декабря? 18 сентября? 23 февраля? 19) На сколько дней будетъ разница между юліанскимъ и григоріанскимъ лѣтосчисленіемъ въ двадцатомъ столѣтіи? въ двадцать первомъ? въ XXV? 20) Сколько дней имѣетъ мартъ? іюнь? январь? ноябрь? августъ? февраль? іюль? октябрь? апрѣль? декабрь? май? сентябрь? 21) Какое число наз. простымъ именов. числомъ? составнымъ?

97. Раздробленіе. Весьма часто приходится именованное число, выраженное въ мѣрахъ одного названія или въ нѣсколькихъ мѣрахъ различныхъ названій, выражать въ мѣрахъ какого-нибудь одного *низшаго* названія. Дѣйствіе, посредствомъ котораго можно достигнуть этого, наз. *раздробленіемъ*. Пусть напр. требуется 7 пуд. 18 фунт. 25 лот. выразить въ золотникахъ.

```
  7 пуд. 18 фун. 25 лот.
×40
 280
+18
 298 фун.
×32
 596
894
9536
 +25
9561 лот.
  ×3
28683 золот.
```

Такъ какъ 1 пуд. содержитъ 40 фун., то 7 пуд. будутъ содержать фунтовъ въ 7 разъ больше; слѣд. надо умножить 40 на 7, или, что то же, 7 умножить на 40, что мы и дѣлаемъ, подписывая 40 подъ 7. Такимъ образомъ мы выразимъ 7 п. въ фун.; а придавъ къ произведенію 18 фун., находящіеся въ данномъ числѣ, найдемъ, что въ немъ содержится всего 298 фун.; 298 фун. выразимъ въ слѣдующихъ за ними меньшихъ мѣрахъ, т.-е. въ лотахъ; для этого умножимъ 298 на 32, такъ какъ въ одномъ фун. содержится 32 лота. Придавъ къ полученному произведенію 25 лот., находящіеся въ данномъ числѣ, выразимъ все данное число въ лот. Наконецъ, полученное число 9561 лотъ выразимъ въ золотникахъ, умноживъ его на 3, ибо лотъ содержитъ 3 золотн., и найдемъ, что 7 пуд. 18 фун. 25 лот.=28683 золот.

Итакъ, *чтобы раздробить данное составное именованное число, надо начать дѣйствіе съ мѣръ высшаго названія. Ихъ нужно раздробить въ слѣдующія за ними мѣры низшаго названія, умноживъ на ихъ единичное отношеніе. Если въ данномъ числѣ есть мѣры одного названія съ тѣми, которыя получены въ произведеніи, то ихъ надо придать къ произведенію и раздробить всю сумму въ слѣдующія за ними мѣры, подобно предыдущему. Такъ должно поступать до тѣхъ поръ, пока не получимъ тѣ мѣры, въ которыхъ надо было выразить данное число.*

Примѣры. 1) 12 пуд. 20 фун.=48000 золотн.

2) 50 стопъ 14 дес.=24336 лист.

3) 7 четвертей 5 четверик. 3 гарн.=491 гарн.

98. Превращеніе. Превращеніе есть дѣйствіе, обратное раздробленію; именно, посредствомъ него можно узнать, сколько въ данномъ именованномъ числѣ, состоящемъ изъ мѣръ одного названія. содержится различныхъ мѣръ высшихъ названій. Наприм. сколько сутокъ, часовъ и минутъ заключается въ 440244 секундахъ?

```
440244 сек. | 60
 202        |7337  мин.| 60
  224       |133       |122  часа. | 24
   444      | 137      |  2  часа. |  5  сутокъ.
    24 сек. |  17 мин. |
```

Превращаемъ секунды въ мѣры, непосредственно слѣдующія за ними, т. е. въ минуты, разсуждая такъ: въ минутѣ 60 секундъ; слѣд. въ 440244 секундахъ будетъ столько минутъ, сколько разъ 60 содержится въ 440244, т. е. надо 440244 раздѣлить на 60. Частное 7337 покажетъ, сколько въ данномъ числѣ содержится минутъ, а остатокъ 24—сколько остается секундъ.

Затѣмъ 7337 минутъ превратимъ въ часы, для чего 7337 раздѣлимъ на 60; получимъ 122 часа и 17 минутъ; 122 часа превратимъ въ сутки, для чего раздѣлимъ 122 на 24; получимъ 5 дней и 2 часа. Такимъ образомъ 440244 сек.=5 сут. 2 час. 17 мин. 24 сек.

Итакъ, *чтобы сдѣлать превращеніе, должно данное число раздѣлить на единичное отношеніе данныхъ мѣръ къ слѣдующимъ высшимъ. Частное покажетъ, сколько высшихъ мѣръ получится изъ мѣръ даннаго названія, а остатокъ—сколько мѣръ даннаго названія не составятъ ни одной высшей. Поступивъ точно такъ же съ частнымъ, т. е. раздѣливъ его на единичное отношеніе мѣръ, въ которыхъ оно выражено, къ слѣдующимъ высшимъ, найдемъ, сколько въ немъ будетъ заключаться этихъ послѣднихъ. Съ новымъ частнымъ поступаютъ такъ же, какъ и съ предыдущимъ, и т. д. до тѣхъ поръ, пока частное не будетъ меньше единичнаго отношенія тѣхъ*

мѣръ, въ которыхъ оно выражено, къ слѣдующимъ высшимъ. Взявъ потомъ послѣднее частное и всѣ остатки отъ послѣдняго къ первому, получимъ составное именованное число, равное данному простому.

Примѣры: 1) 256082 верш.=10 верст. 335 саж. 2 верш.

2) 256970 золотн.=66 пуд. 36 фун. 24 лот. 2 зол.

3) 2496 гарнц.=39 четвертямъ.

4) 523 ведра=13 боч. 3 вед.

99. Такъ какъ раздробленіе и превращеніе суть дѣйствія, обратныя одно другому, то они могутъ служить другъ другу повѣркою.

100. **Сложеніе**. Пусть дано сложить: 15 саж. 9 фут. 8 дюйм. 7 лин. съ 25 саж. 5 фут. 7 дюйм. 4 лин. и съ 14 саж. 9 дюйм. 6 лин. Подписываемъ данныя числа одно подъ другимъ такъ, чтобы мѣры одного названія находились въ одномъ столбцѣ: потомъ на-

саж.		ф.		дюйм.		лин.
15	+	9	+	8	+	7
+25	+	5	+	7	+	4
14	+	0	+	9	+	6
56	+	2	+	1	+	7

чинаемъ складывать самыя низшія мѣры, т. е. линіи; получимъ 17 лин.; превращаемъ это число въ дюймы; находимъ 1 д. 7 лин.; 7 лин. подписываемъ подъ линіями, а 1 дюймъ приложимъ потомъ къ суммѣ дюйм. Складывая дюймы, получимъ 25 дюйм.; превращаемъ ихъ въ футы; находимъ 2 ф. 1 д.; 2 фута придадимъ потомъ въ фут., а 1 дюймъ подписываемъ подъ дюйм. Складывая футы, получаемъ 16 фут., и, превращая это число въ сажени, находимъ 2 саж. и 2 фута; 2 фута подписываемъ подъ футами, а 2 саж. придадимъ къ суммѣ саж. Складывая наконецъ сажени, полученную сумму 56 сполна пишемъ подъ саженями, потому что она не составляетъ ни одной версты. Сумма=56 саж. 2 фут. 1 дюйм. 7 лин.

Итакъ, *чтобы сложить нѣсколько составныхъ именованныхъ чиселъ, подписываютъ ихъ одно подъ другимъ такъ, чтобы числа, выраженныя въ мѣрахъ одного названія, находились въ одномъ столбцѣ, и начинаютъ складывать мѣры самаго низшаго названія. Если въ суммѣ получится число, большее единичнаго отношенія этихъ мѣръ къ слѣдующимъ высшимъ, то, превративъ ихъ въ эти послѣднія, остатокъ пишутъ подъ тѣми мѣрами, которыя складывали, а частное придаютъ къ суммѣ слѣдующихъ высшихъ мѣръ.*

Примѣры. 1) 3 пуд. 17 фун. 5 л. +8 п. 11 л. 2 зол.+5 пуд. 22 фун. 15 лот. 1 зол.=17 пуд.

2) 17 сут. 8 час. 16 мин. 28 сек.+45 сут. 10 мин.+26 сут. 21 час. 33 мин. 32 сек.=89 сут. 6 час.

3) Куплено 4 цыбика чаю; въ первомъ было 2 пуда 10 фун. 8 лот.; во второмъ 3 п. 5 фун.; въ третьемъ столько, сколько въ первыхъ двухъ вмѣстѣ; въ четвертомъ на 1 пуд. 5 фун. 8 л. больше, чѣмъ въ третьемъ. Сколько всего куплено чаю?

Для рѣшенія задачи надо найти суммy 2 п. 10 фун. 8 л.+3 п. 5 фун.+2 пуд. 10 фун. 8 л.+3 п. 5 ф.+2 п. 10 ф. 8 л.+3 п. 5 фун.+1 пуд. 5 фун. 8 лот., получимъ 17 пуд. 11 фун.

101. Задачи о времени. Изъ практическихъ задачъ, приводящихъ къ сложенію составныхъ имен. чиселъ, надо обратить вниманіе на задачи о времени, такъ какъ онѣ представляютъ нѣкоторыя особенности при рѣшеніи. Возьмемъ нѣсколько такихъ задачъ.

1) 1812-го года 26-го августа происходила Бородинская битва; а черезъ 1 годъ 6 мѣсяцевъ 21 день послѣ нея Русскіе взяли Парижъ; когда былъ взятъ Парижъ?

Чтобы рѣшить эту задачу, сосчитаемъ, сколько лѣтъ, мѣсяцевъ, дней прошло отъ Р. Х. до Бородинской битвы. Такъ какъ она была въ 1812-мъ году, то слѣд., прошло 1811 лѣтъ, а въ 1812-мъ году прошло полныхъ 7 мѣсяцевъ (январь, февраль, мартъ, апрѣль, май, іюнь, іюль) и еще 25 дней августа. Итакъ отъ Р. Х. до дня Бородинской битвы прошло 1811 лѣтъ 7 мѣс. 25 дней. А такъ какъ послѣ этой битвы до взятія Парижа прошло еще 1 годъ 6 мѣсяц. 21 день, то, чтобы узнать, сколько времени прошло отъ Р. Х. до взятія Парижа, надо сложить 1811 лѣтъ 7 мѣсяц. 25 дней, съ 1 год. 6 мѣс. 21 дн.; получимъ 1813 лѣтъ 2 мѣс. 18 дн., потому что при превращеніи 46 дней въ мѣсяцы надо взять только 28 дн. такъ какъ во 2-мъ мѣсяцѣ простого года (февралѣ) 28 дней. Поэтому отъ Р. Х. до взятія Парижа прошло 1813 лѣтъ, слѣдов. на-

	л.	мѣс.	дн.
	1811	+ 7	+ 25
+	1	+ 6	+ 21
	1813	+ 2	+ 18

ступилъ и шелъ 1814-й годъ, и въ этомъ году прошло 2 мѣсяца, т. е. январь и февраль, и 18 дней третьяго мѣсяца—марта; поэтому наступило 19-е марта 1814-го года. Итакъ, Русскіе взяли Парижъ 19 марта 1814 года.

2) Корабль вышелъ въ кругосвѣтное плаваніе 1880 года 12-го мая, а возвратился черезъ 2 года 72 дня; когда онъ возвратился?

Отъ Р. Х. до времени отправленія корабля прошло 1879 лѣтъ, и въ 1880-мъ году (который былъ високосный) прошло въ январѣ 31 день, въ февралѣ 29, въ мартѣ 31, въ апрѣлѣ 30 и въ маѣ 11, всего слѣд. 132 дня. А потому отъ Р. Х. до дня прибытія корабля прошло 1879 лѣтъ 132 дня, да еще 2 года 72 дня, т.-е. прошло 1881 годъ 204 дня; слѣд. наступилъ и шелъ 205-й день 1882-го года. Такъ какъ 1882-й годъ былъ простой, то, отдѣляя изъ 204

дней 31 день для января, 28 для февраля, 31 для марта, 30 для апрѣля, 31 для мая и 30 для іюня, всего 181 день, найдемъ, что въ іюлѣ прошло 23 дня; поэтому корабль возвратился 24-го іюля 1882-го года.

3) Нѣкто выѣхалъ изъ Москвы 17-го ноября 1880 года въ 7 часовъ пополуночи и былъ въ отсутствіи 12 дней и 8 часовъ; когда онъ воротился?

Онъ выѣхалъ, когда отъ начала мѣсяца прошло 16 дней и 7 часовъ отъ полуночи; возвратился черезъ 12 дней 8 часовъ, слѣд., сложивъ 16 дней 7 час. съ 12 дн. 8 час., найдемъ, что отъ начала мѣсяца до его пріѣзда прошло 28 дн. 15 час., т. е. онъ вернулся, когда наступило 15 часовъ 29-го дня того же мѣсяца, т. е. ноября; или, отдѣляя изъ 15 часовъ 12, которые считаются до полудня,— въ 3 часа пополудни 29-го ноября 1880 года.

Вообще, *въ задачахъ о времени, разрѣшаемыхъ посредствомъ сложенія, дается всегда время какого-нибудь событія* (т. е. указывается, въ какомъ году, какого мѣсяца и числа случилось событіе); *дается также промежутокъ времени между этимъ событіемъ и другимъ послѣдующимъ* (т. е. указывается, сколько лѣтъ, мѣсяцевъ, дней... прошло между обоими событіями), и *требуется опредѣлить время этого позднѣйшаго событія*. Такъ въ первой нашей задачѣ дано было время Бородинской битвы — 26-е августа 1812 г.; данъ былъ промежутокъ времени между Бородинской битвой и позднѣйшимъ событіемъ — взятіемъ Парижа (1 г. 6 мѣс. 21 день), и требовалось опредѣлить, когда былъ взятъ Парижъ, т. е. требовалось найти время позднѣйшаго событія.

102. Вычитаніе. Пусть дано вычесть 15 пуд. 23 фун. 29 лот. изъ 25 пуд. 4 фун. 7 лот. Подписавъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы мѣры одного названія находились въ одномъ столбцѣ, начинаемъ вычитаніе съ мѣръ низшаго названія; 29 лот. изъ 7 лот. нельзя вычесть; поэтому у 4-хъ фун. занимаемъ 1 фун. и

$$\begin{array}{rcrcrl} & & 43 & & 39 & \\ 25\text{ пуд.} & + & 4\text{ ф.} & + & 7 & \text{лот.} \\ -15 & + & 23 & + & 29 & \\ \hline 9 & + & 20 & + & 10 & \end{array}$$

раздробляемъ его въ лоты; полученные 32 лота придаемъ къ 7, что даетъ 39 лот.; 29 лот. изъ 39 лот. будетъ 10 лот.; 10 подписываемъ подъ лотами.

Далѣе—23 фун. нельзя вычитать изъ 3 фун.; поэтому, занявъ у 25 пуд. 1 пудъ, раздробляемъ его въ фун. и полученные 40 фун. придаемъ къ 3-мъ, что даетъ 43 фун. Вычитая теперь 23 фун. изъ 43, остатокъ 20 пишемъ подъ фунтами.

Наконецъ, вычтя 15 пуд. изъ 24 пуд., остатокъ 9 пишемъ подъ пудами. Искомая разность=9 п. 20 ф. 10 л.

Возьмемъ другой примѣръ. Изъ 5 верстъ вычесть 3 версты 25 саж. 4. фута 5 дюйм. 2 лин.?

.	499	6	11	10
5 в. +	0 с. +	0 ф. +	0 д. +	0 лин.
— 3 +	25 +	4 +	5 +	2
1 +	474 +	2 +	6 +	8

Такъ какъ въ уменьшаемомъ нѣтъ ничего, кромѣ верстъ, то, чтобы вычесть мѣры низшего названія, беремъ 1 версту и раздробляемъ ее въ сажени. Изъ полученныхъ 600 саж. пишемъ надъ саженями 499, а 1 саж. раздробляемъ въ футы. Изъ полученныхъ отъ раздробленія 7 фут., 6 пишемъ надъ фут., а 1 футъ раздробляемъ въ дюймы; 11 оставляемъ надъ дюйм., а 12-й раздробляемъ въ линіи и полученныя 10 линій пишемъ надъ линіями. Теперь вычитаніе не представляетъ затрудненія. Итакъ, *при вычитаніи составн. имен. чиселъ подписываютъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы мѣры одного названія стояли въ одномъ столбцѣ, потомъ начинаютъ вычитаніе съ правой руки; если число какихъ-нибудь мѣръ въ вычитаемомъ будетъ больше числа тѣхъ же мѣръ въ уменьшаемомъ, то занимаютъ у слѣдующихъ высшихъ мѣръ одну и раздробивъ ее въ тѣ, изъ которыхъ нельзя было вычитать, придаютъ полученное число къ этимъ послѣднимъ; такимъ образомъ поступаютъ до послѣдняго столбца къ лѣвой рукѣ.*

Примѣры. 1) 3 пуд. 15 ф.—24 ф. 16 л.=2 п. 30 ф. 16 л. .

2) 2 бочки—31 вед. 4 шт. 1 круж.=1 боч. 8 вед. 5 шт. 1 кр.

3) 4 вер. 24 саж.—3 вер. 467 саж. 1 ар.=56 саж. 2 арш.

4) 128 пуд.—(64 п. 12 ф. 16 л. + 32 п. 18 ф. 20 л.) = 31 п. 8 ф. 28 л.

103. Задачи о времени. Задачи о времени, рѣшаемыя посредствомъ вычитанія, бываютъ двухъ родовъ: 1) *дается время двухъ событій и требуется опредѣлить промежутокъ времени между ними,* 2) *дается время позднѣйшаго событія и промежутокъ между нимъ и другимъ, предшествовавшимъ, событіемъ, и требуется опредѣлить время предшествовавшаго событія.*

1) Нѣкто родился 19-го мая 1828 года, а умеръ 2 марта 1861 года; сколько времени онъ жилъ?

Въ этой задачѣ дано время двухъ событій—рожденія и смерти, и требуется опредѣлить промежутокъ времени между ними. Опредѣлимъ сколько времени прошло отъ Р. Х. до каждаго изъ этихъ событій; притомъ выразимъ это время въ *годахъ и дняхъ*, а не въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ, потому что мѣсяцы состоятъ не изъ одинаковаго числа дней, и, выразивъ числа въ мѣсяцахъ, мы сдѣлали бы ошибку. Отъ Р. Х. до дня рожденія лица, о которомъ идетъ дѣло, прошло 1827 лѣтъ, и въ 1828-мъ году (который былъ високосный) прошло въ январѣ 31 день, въ февралѣ 29, въ мартѣ 31, въ апрѣ-

лѣ 30 и въ маѣ 18 дней; всего слѣдовательно 1827 лѣтъ 139 дней. А до дня смерти прошло 1860 лѣтъ, и въ 1861-мъ (простомъ) году въ январѣ 31 день, въ февралѣ 28 и 1 день въ мартѣ; всего слѣд. 1860 лѣтъ 60 дней. Сколькими годами и днями второе время больше перваго, столько лѣтъ и дней прожилъ этотъ человѣкъ; слѣд. для рѣшенія задачи надо изъ 1860 лѣтъ 60 дней вычесть 1827 лѣтъ 139 дней. Начиная вычитаніе, видимъ, что 139 дней

$$\begin{array}{rcl} & & 426 \\ 1860 \text{ л.} & + & 60 \text{ дн.} \\ 1827 & + & 139 \\ \hline 32 & + & 287 \end{array}$$

нельзя вычесть изъ 60 дней; занимаемъ 1 годъ, и такъ какъ 1860-й годъ есть високосный, то къ 60 днямъ придаемъ 366 дн.; получимъ 426. Искомая разность будетъ 32 года 287 дней, и слѣд. человѣкъ, о которомъ идетъ дѣло, жилъ 32 года 287 дн.

Выразимъ теперь время обоихъ событій въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ. Отъ Р. Х. до дня рожденія лица, о которомъ идетъ дѣло, прошло 1827 лѣтъ 4 мѣсяца 18 дней; а до дня смерти 1860 лѣтъ 2 мѣсяца 1 день. Вычитая первое число изъ второго, найдемъ 32 года 9 мѣс. 13 дней, или, раздробляя 9 мѣсяц. 13 дней въ дни, по-

$$\begin{array}{rcccl} & & 12 & & 30 \\ 1860 \text{ л.} & + & 2 \text{ м.} & + & 1 \text{ д.} \\ 1827 & + & 4 & + & 18 \\ \hline 32 & + & 9 & + & 13 \end{array}$$

лучимъ 32 года 283 дня. Это число на 4 дня меньше того, которое мы нашли прежде, потому что при раздробленіи 9 мѣсяцевъ не принято во вниманіе, что нѣкоторые изъ 9 мѣсяцевъ заключаютъ въ себѣ по 31 дню, или по 28, или по 29, вмѣсто 30-ти.

2) Изъ двухъ братьевъ одинъ моложе другого на 3 года 185 дн.; младшій родился 8-го сентября 1847-го года, когда родился старшій братъ?

Отъ Р. Х. до дня рожденія меньшого брата прошло 1846 лѣтъ и въ 1847 году (простомъ) въ январѣ 31 день, въ февралѣ 28, въ мартѣ 31, въ апрѣлѣ 30, въ маѣ 31, въ іюнѣ 30, въ іюлѣ 31, въ августѣ 31 и въ сентябрѣ 7 дней, всего слѣд. 1846 лѣтъ 250 дней; а до дня рожденія старшаго брата прошло отъ Р. Х. 3-мя годами 185 днями меньше, т. е. 1846 л. 250 дн.—3 г. 185 дн. Сдѣлавъ вычитаніе, найдемъ, что старшій братъ родился, когда отъ Р. Х. прошло 1843 года и 65 дней, и слѣд. наступилъ 66-й день 1844 (високоснаго) года. Отдѣляя поэтому изъ 65 дней 31 для января, 29 для февраля, получимъ въ остаткѣ 5, и значитъ старшій братъ родился 6-го марта 1844 года.

3) Корабль, отправившійся изъ Петербурга 12-го іюня въ 7 часовъ 35 мин. утра, прибылъ въ Стокгольмъ 15 іюня въ 8 час. 12 мин. вечера; сколько времени онъ находился въ пути?

Отъ начала мѣсяца до отплытія корабля прошло 11 дн. 7 час. 35 мин.; а до прибытія 14 дн. и въ 15-й день 12 час. до полудня, да послѣ полудня 8 час. 12 мин., всего слѣд. 14 дн. 20 час. 12 мин. Вычтя 11 дн. 7 час. 35 мин. изъ 14 дн. 20 час. 12 мин., найдемъ, что корабль находился въ пути 3 дня 12 час. 37 мин.

104. Умноженіе. Мы знаемъ, что умножить одно число на другое значитъ одно число взять слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ находится единицъ; поэтому *множитель долженъ быть* непремѣнно *число отвлеченное*. Пусть требуется умножить 3 пуда 28 фун. 2 лота на 7.

п.		ф.		лот.
3	+	28	+	2
			×	7
25	+	36	+	14

Подписавъ множителя подъ множимымъ, умножаемъ 2 лота на 7; полученное произведеніе 14 лот., такъ какъ оно не составляетъ ни одного фунта, пишемъ сполна подъ лотами. Далѣе—умноживъ 28 фун. на 7, получаемъ 196 фун. Это число превращаемъ въ пуды; находимъ 4 пуда 36 фун.; 36 фун. пишемъ подъ фунтами, а 4 пуда придадимъ къ произведенію 3 пуд. на 7. Наконецъ, умноживъ 3 пуда на 7 и придавъ къ полученному произведенію 4 пуда, полученные при умноженіи предыдущихъ мѣръ, всю сумму 25 пишемъ подъ пудами. Произведеніе=25 пуд. 36. фун. 14 лот.

Итакъ, *чтобы умножить составное именованное число, подписываютъ множителя подъ множимымъ и умножаютъ на него послѣдовательно всѣ мѣры, начиная съ низшихъ. Если при умноженіи какихъ-нибудь мѣръ получится въ произведеніи число, большее единичнаго отношенія этихъ мѣръ къ слѣдующимъ высшимъ, то его превращаютъ въ слѣдующія высшія мѣры; частное придаютъ къ произведенію на множителя слѣдующихъ мѣръ, а остатокъ пишутъ подъ тѣми мѣрами, которыя умножали.*

Еще примѣръ: локомотивъ проходитъ въ каждую минуту по 275 саж. 5 фут.; сколько онъ пройдетъ въ 5 часовъ 50 мин.?

Онъ пройдетъ во столько разъ больше 275 саж. 5 фут., сколько минутъ содержится въ 5 часахъ 50 мин., т. е. въ 350 разъ; слѣд. надо 275 саж. 5 фут. умножить на 350.

		275 саж.	+	5 фут.
			×	350
193 вер.	+	0	+	0.

Умноживъ 5 фут. на 350, получимъ 1750 фут., или ровно 250 саж.; поэтому подъ футами пишемъ 0, а 250 саж. придадимъ къ произведенію 275 саж. на 350. Умноживъ 275 саж. на 350, получимъ 96250 саж.; придавъ къ этому числу 250 саж., полученныя при умноженіи предыдущихъ мѣръ, найдемъ 96500 саж., или ровно 193

версты; поэтому въ произведенiи пишемъ 0 сеж. и 193 версты. Итакъ локомотивъ пройдетъ 193 версты. Вотъ еще примѣры:

1) 2 вер. 93 саж. 2 ар. 4 верш.×8=17 вер. 250 саж.

2) 2 фун. 10 лот.×1500=86 пуд. 28 ф. 24 л.

3) (3 ч. 11 м. 15 с. + 2 ч. 16 м. 45 с.).×120 = 27 сут. 8 ч.

4) (8 боч.—3 боч. 15 вед. 8 шт.).5=23 боч. 1 вед.

5) [(7 пуд. 15 ф. 1 зол.+2 пуд. 27 фун. 20 л. 2 з.)—(17 п. 8 ф.—7 п. 8 ф. 21 л. 2 зол.)].24=2 пуд.

6) Сумму 4 вер. 176 саж. 3 ф. 10 дюйм.+280 с. 3 ф. 10 дюйм. вычесть изъ разности 17 вер. 3 саж. —11 вер. 462 саж. 4 фут. и остатокъ умножить на 42? *От.* 7 верстъ.

7) Два парохода вышли изъ пристани утромъ въ три четверти двѣнадцатаго и идутъ по одному направленiю; первый проходитъ въ минуту 160 саж. 1 ар. 13 верш., а второй 140 саж. 2 ар. 12 в.; на какомъ разстоянiи другъ отъ друга они будутъ въ 1 ч. 21 мин. пополудни?

Второй пароходъ отстаетъ отъ перваго въ 1 минуту на 160 саж. 1 ар. 13 вер.—140 с. 2 ар. 12 в.=19 с. 2 ар. 1 вер.; отъ 11 ч. 45 м. утра до 1 ч. 21 м. пополудни проходитъ 13 час. 21 мин. — 11 час. 45 мин.=1 час. 36 мин.=96 мин.; слѣд. пароходы будутъ на разстоянiи (19 саж. 2 ар. 1 вер.)×96=3 вер. 390 с.

105. Дѣленiе. При дѣленiи сост. имен. чиселъ бываютъ два случая: 1) *раздѣлить составное имен. число на другое именованное, однородное съ первымъ;* 2) *раздѣлить составное имен. число на число отвлеченное.*

1-й случай. На сколько человѣкъ хватитъ 4 пуда 2 фун. 16 лот. хлѣба, если каждому дать по 2 фун. 16 лот.?

Хлѣба хватитъ на столько человѣкъ, сколько разъ 2 ф. 16 лот. содержатся въ 4 пуд. 2 ф. 16 лот.; слѣд. второе число надо раздѣлить на первое. Сдѣлать же это можно, выразивъ дѣлимое и дѣлителя въ однѣхъ какихъ-нибудь мѣрахъ. Для этого оба числа раздробимъ въ лоты; тогда найдемъ, что 4 п. 2 ф. 16 л. = 5200 лот.; а 2 ф. 16 л. = 80 л. Раздѣливъ 5200 лот. на 80 лот., получимъ въ частномъ 65; слѣд. 2 фун. 16 лот. въ 4 пуд. 2 ф. 16 лот. содержатся 65 разъ; а потому хлѣба хватитъ ровно на 65 человѣкъ.

Итакъ, *чтобы раздѣлить состав. имен. число на другое число, однородное съ нимъ, надо дѣлимое и дѣлителя раздробить въ одинакiя мѣры и полученныя числа раздѣлить одно на другое.* Частное будетъ число *отвлеченное*, ибо оно показываетъ, *сколько разъ* одно именов. число содержится въ другомъ.

Возьмемъ еще задачу: локомотивъ проходитъ въ 1 минуту 275 саж. 5 фут.; во сколько времени пройдетъ онъ 193 версты?

Чтобы узнать, во сколько *минутъ* пройдетъ локом. 193 версты, должно 193 вер. раздѣлить на 275 саж. 5 фут. Обративъ для этого

дѣлимое и дѣлителя въ футы, получимъ 193 вер. = 676500 фут.; 275 с. 5 фут.=1930. Такъ какъ 675500 : 1930=350, то локомотивъ пройдетъ 193 версты въ 350 мин., или въ 5 час. 50 мин.

2-й случай. Для продовольствія 350 человѣкъ отпущено 21 п. 2 ф. 6 лот. хлѣба; сколько хлѣба идетъ на каждаго человѣка?

Чтобы узнать это, надо 21 пудъ 2 фун. 6 кот. раздѣлить на 350 равныхъ частей.

```
 п.    ф.    кот.
 21 + 2 + 6  |350
×40          |2 ф.+13 лот.
 840
 +2
 842
 142
×32
 284
426
4544
 +6
4550
1050
   0
```

Дѣленіе отвлеченныхъ чиселъ мы начинаемъ съ единицъ высшихъ разрядовъ; поэтому и теперь наянемъ съ мѣръ высшаго названія. Такъ какъ 21 пудъ нельзя раздѣлить на 350, то раздробляемъ пуды въ фун., для чего умножаемъ 21 на 40. Къ полученному произведенію 840 фун. придаемъ 2 фун., находящіеся въ дѣлимомъ, и сумму 842 фун. дѣлимъ на 350; въ частномъ получаемъ 2 фун., а въ остаткѣ 142 фун. Остатокъ 142 фун. раздробляемъ въ лоты, умножая на 82; къ полученному произведенію 4544 л. придаемъ 6 лот., находящіеся въ дѣлимомъ, и сумму 4550 лот. дѣлимъ на 350. Частное—14 лот.—пишемъ рядомъ съ прежде полученнымъ частнымъ—2-мя фунтами; слѣд. полное частное будетъ 2 фун. 13 лот., и каждый человѣкъ получитъ по 2 фун. 13 лот. хлѣба.

Возьмемъ еще примѣръ: пароходъ въ 2 часа 12 мин. прошелъ 52 версты 466 саж.; сколько онъ проходилъ въ минуту, если шелъ постоянно съ одинакой скоростью?

Въ одну минуту пароходъ проходилъ меньше 52 верстъ 466 саж. во столько разъ, сколько минутъ содержится въ 2 час. 12 минут., т. е. въ 132 раза; поэтому надо 52 вер. 466 саж. раздѣлить на 132. Поступая по предыдущему, найдемъ, что пароходъ дѣлалъ по 200 саж. 3 фут. 6 дюйм. въ минуту.

Такимъ образомъ *при дѣленіи составного именованнаго числа на отвлеченное, начинаютъ дѣйствіе съ самыхъ высшихъ мѣръ,*

накія только есть въ дѣлимомъ. Если дѣлитель не будетъ содержаться въ нихъ, то ихъ раздробляютъ въ слѣдующія за ними мѣры и придаютъ къ полученному произведенію такія же мѣры, находящіяся въ дѣлимомъ; точно такъ же поступаютъ съ остатками, полученными при дѣленіи мѣръ каждаго названія. Частныя при дѣленіи мѣръ каждаго названія будутъ одноименны со своими дѣлимыми.

Такъ какъ раздѣлить составное именованное число на отвлеченное значитъ раздѣлить первое на нѣсколько равныхъ частей, и какъ часть всегда однородна съ цѣлымъ; то очевидно, что частное, показывающее величину каждой части, должно быть однородно съ дѣлимымъ, т. е. должно быть *именованное*.

Причины, по которымъ сложеніе, вычитаніе и умноженіе состав. имен. чиселъ начинаются съ правой руки, а дѣленіе съ лѣвой, тѣ же самыя, какъ при дѣйствіяхъ съ отвлеченными числами.

106. Примѣры. 1) 35 пуд. 20 лот. : 180=7 фун. 25 лот.

2) 23 стопы 3 дес. 12 лис. : 1 ст. 18 дес. 15 лис.=12.

3) 69 пуд. 5 фун. 13 лот. 1 зол. : 3 пуд. 18 ф. 8 *л.* 2 з.=20.

4) 4 вере. 291 саж. 2 арш. : 2000=1 саж. 7 верш.

5) (31 часъ 48 мин.+16 час. 12 мин.) : 192=15 мин.

6) Сложить 124 вере. 410 саж. 3 ф. съ 45 верс. 471 саж. 5 ф. и сумму раздѣлить на 4 вере. 371 с. 5 ф. 1 дюйм.? *От.* 36.

7) Сумму 5 сут. 7 час. 18 мин. 32 сек.+1 сут. 13 ч. 41 м. 28 с. умножить на 3; изъ произведенія вычесть (8 час. 3 мин. — 5 ч. 33 м.) . 60 и разность раздѣлить на 9? *От.* 1 с. 14 ч. 20 м.

8) Слитокъ золота въ 1 фун. 17 лот. 1 зол. стоитъ 479 р. 52 к.; а слитокъ серебра въ 5 фун. 10 лот. стоитъ 137 р. 70 к. Сколько золота можно получить за 18 фун. серебра?

За 18 фун. серебра дадутъ золота во столько разъ меньше, во сколько оно дороже серебра; а чтобы узнать, во сколько разъ золото дороже серебра, опредѣлимъ, что стоитъ 1 золотникъ того и другого металла. Такъ какъ 1 ф. 17 л. 1 зол. = 148 зол., а 5 ф. 10 л.=510 зол., то золотникъ золота стоитъ 479 р. 52 к. : 148= =3 руб. 24 коп.; а золотникъ серебра 137 р. 70 к. : 510 = 27 к. Раздѣливъ 3 р. 24 в. на 27 к. или 324 на 27, узнаемъ, что золото дороже серебра въ 12 разъ; слѣдов. за 18 фун. серебра дадутъ 18 фун. : 12=1 ф. 16 лот. золота.

107. Вопросы. 1) Что наз. раздробленіемъ? 2) Какъ оно дѣлается? 3) Что наз. превращеніемъ? 4) Какъ оно дѣлается? 5) Какъ повѣряется раздробленіе? превращеніе? 6) Какъ дѣлается сложеніе составн. именован. чиселъ? 7) Какія задачи о времени рѣшаются сложеніемъ? 8) Какъ дѣлается вычитаніе составн. именован. чиселъ? 9) Какъ дѣлается вычитаніе, если составн. имен. число надо вычесть изъ простого? 10) Какія задачи о времени рѣшаются вычитаніемъ? 11) Какъ дѣлается умноженіе состав. именов. чиселъ? 12) Какимъ числомъ долженъ быть множитель и почему? 13) Сколько бываетъ случаевъ при

дѣленіи сост. имен. чиселъ? Какіе они? 14) Какъ дѣлается дѣленіе, если дѣлимое и дѣлитель однородныя сост. имен. числа? Какимъ числомъ будетъ частное? 15) Какъ дѣлается дѣленіе, если дѣлимое будетъ сост. имен. число, а дѣлитель число отвлеченное? Какимъ числомъ будетъ частное?

108. Задачи. 1) Бочка, наполненная водой, вѣситъ 34 пуда 26 фун.; а пустая 3 пуда 24 фунта. Сколькимъ кубич. футамъ равняется вмѣстимость бочки, если 1 куб. дюймъ воды вѣситъ 3 золотника 80 долей?

Вѣсъ воды, наполняющей бочку, = 34 п. 26 ф. — 3 п. 24 ф. = = 31 п. 2 ф.; объемъ воды въ куб. дюйм. = 31 п. 2 ф. 3 лот. 80 дол. = 11446272 дол. : 368 дол. = 31104; вмѣстимость бочки въ куб. фут. = 31104 : 1728 = 18.

2) Перваго января 1884 г. куплено было стеариновыхъ свѣчей четверику (т. е. по 4 на фунтъ) по 25 к. за фунтъ; каждый день сгорало по 8 свѣчей; весь запасъ кончился 30 апрѣля. Сколько было заплачено за свѣчи?

Отъ 1 января до 1 мая 1884 г. прошло 31+29+31+30, т. е. 121 день; каждый день сгорало по 2 фунта, слѣд. куплено 2.121=242 фун.; заплачено 25.242=6050 коп.=60 р. 50 к.

3) На какую сумму надо купить муки для продовольствія 360 человѣкъ въ теченіе 22 дней, если на каждаго отпускается въ день 1 ф. 16 лот. хлѣба, фунтъ муки даетъ 8 лот. припеку и пудъ муки стоитъ 80 коп.?

Если на человѣка отпускается въ день 1 ф. 16 лот. хлѣба, то въ 22 дня выйдетъ на каждаго въ 22 раза больше, т. е. 33 ф.; а на 360 человѣкъ выйдетъ 33.360 = 11880 фун. = 297 пуд. хлѣба. Такъ какъ фунтъ муки даетъ 8 зол. припеку, то фунтъ припеку выходитъ изъ 4 ф. муки; т. е. изъ 4 фун. муки получается 5 фун. хлѣба; а слѣд. пудъ хлѣба получается изъ 4.8 = 32 фун. муки; а чтобы получить 297 пуд. хлѣба, надо взять муки 32 . 297 фун. = =9504 ф.; 1 фун. муки стоитъ 2 коп., слѣд. за всю муку надо заплатить 2.9504=19008 к.=190 р. 8 к.

4) На фабрикѣ работало 8 мужчинъ, нѣсколько женщинъ и 12 человѣкъ дѣтей; мужчины получали по 1 руб. 50 к. въ день, женщины по 90 коп., а дѣти по 65 коп. въ день. За работу съ понедѣльника до субботы включительно фабрикантъ заплатилъ всѣмъ рабочимъ 167 р. 40 к. Сколько было женщинъ?

За 6 дней работы каждый мужчина получилъ 9 р., а всѣ вмѣстѣ 72 руб.; дѣти получили 46 руб. 80 в.; женщины получили 167 р. 40 коп.—(72 р.+46 р. 80 к.)=48 р. 60 к.; а такъ какъ каждая женщина должна получить 5 р. 40 к., то ихъ было столько, сколько разъ 5 р. 40 к. содержится въ 48 р. 60 к., т. е.

48 р. 60 к. 5 р. 40 к. = 4860 : 540 = 9.

5) Сколько нужно истратить въ теченіе четырехъ первыхъ мѣ-

сяцевъ 1895 года на освѣщеніе 14 комнатъ, если въ 13 комнатахъ по 5 лампъ, а въ 14-й комнатѣ 3 лампы; каждая лампа должна ежедневно горѣть въ теченіе 6 часовъ, и въ каждой сгораетъ 16 лот. керосина въ 5 час., пудъ керосина стоитъ 4 руб.?

Въ 4 первыхъ мѣсяцахъ 1895 г. содержится 120 дней; слѣд. каждая лампа должна горѣть 6 . 120 = 720 часовъ; такъ какъ въ каждой лампѣ сгораетъ 16 лот. керосина въ продолженіе 5 часовъ, то въ каждой лампѣ въ 720 час. сгоритъ керосина во столько разъ больше 16 лот., во сколько 720 час. больше 5 час., то есть сгоритъ 16. 144=2304 лот.=72 фун.; а во всѣхъ 68 лампахъ сгоритъ 72 . 68=4896 фун.; фунтъ керосина стоитъ 10 коп.; слѣд. на освѣщеніе надо истратить 10.4896=48960 коп.=489 р. 60 к.

6) Куплено 380 мѣшковъ муки, по 7 пуд. 20 фунт. въ каждомъ; товаръ отправленъ по желѣзной дорогѣ, съ платою по 1 коп. съ пуда за каждыя 10 верстъ; всего заплачено за перевозку 242 р. 25 в.; на какое разстояніе былъ перевезенъ товаръ?

Умноживъ 7 пуд. 20 ф. на 380, найдемъ, что всей муки куплено 2850 пуд.; такъ какъ за перевозку берутъ по 1 коп. съ пуда за 10 верстъ, то на 242 руб. 25 коп.=24225 коп. можно было бы перевезти 1 пудъ на 242250 верстъ, а 2850 пуд. можно перевезти на разстояніе=242250   2850=85 вер.

7) Что стоитъ позолотить съ наружной стороны стѣнки, дно и крышку кубическаго ящика, котораго ребро = 5 вершкамъ, если за позолоту 1 квадр. арш. просятъ 320 руб.?

Поверхность ящика=5   5 . 6 кв. верш.=150 кв. верш.; позолота 1 кв. вершка стоитъ 320 р. : 256=1 руб. 25 коп.; позолота ящика стоитъ 1 р. 25 к. × 150=187 р. 50 к.

8) Изъ города *А* выѣхалъ 28 февраля 1893 г. въ 7 часовъ вечера путешественникъ и ѣдетъ къ городу *В*; въ тотъ же день въ 11 час. вечера изъ *В* выѣхалъ другой путешественникъ навстрѣчу первому; первый проѣзжаетъ въ часъ 10 верстъ 75 саж., а второй 8 верстъ 350 саж.: разстояніе между *А* и *В*=229 верстъ 50 саж. Когда путешественники встрѣтятся?

Второй путешественникъ выѣхалъ четырьмя часами позже перваго; въ это время первый проѣхалъ 40 вер. 300 саж., слѣд. при выѣздѣ второго путешественника разстояніе между ними было 229 вер. 50 саж.—40 вер. 300 саж.=188 вер. 250 саж.; въ часъ путешественники приближаются другъ къ другу на 10 вер. 75 саж.+8 верстъ 350 саж.=18 вер. 425 саж.; слѣд. они встрѣтятся черезъ столько часовъ, сколько разъ 18 верстъ 425 саж. содержатся въ 188 вер. 250 саж.; т. е. черезъ 10 часовъ послѣ выѣзда второго путешественника, или 1-го марта въ 9 часовъ утра.

ГЛАВА IV.

О ДѢЛИТЕЛЯХЪ.

109. Числа первоначальныя и составныя. Напишемъ по порядку нѣсколько чиселъ, начиная съ единицы.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18...; нѣкоторыя изъ нихъ, напр. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, могутъ дѣлиться безъ остатка только на единицу и на самихъ себя; другія же, напр. 4, 6, 8, 9, 10..., кромѣ единицы и самихъ себя, могутъ дѣлиться еще и на другія числа; такъ 4 дѣлится на 2; 6 на 2 и на 3; 10 на 2 и 5 и т. под. *Тѣ числа, которыя могутъ дѣлиться только на единицу и на самихъ себя, наз. первоначальными; а тѣ, которыя, кромѣ единицы и самихъ себя, могутъ дѣлиться еще и на другія числа, наз. составными.* Между 1 и 100 содержатся 26 первоначальныхъ чиселъ: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97.

110. *Всякое составное число имѣетъ, кромѣ единицы, хотя одного первоначальнаго дѣлителя.* Для доказательства этой теоремы возьмемъ какое-нибудь составное число a; оно непремѣнно должно дѣлиться безъ остатка на какое-нибудь число a_1, которое >1 и $<a$ (иначе оно не было бы составнымъ). Если a_1 есть первонач. число, то теорема доказана; если же a_1 составное, то оно должно дѣлиться на нѣкоторое число a_2, которое >1 и $<a_1$; на это же число a_2 должно дѣлиться и a, ибо a дѣлится на a_1, а a_1 дѣлится на a_2. Если a_2 будетъ первонач., то теорема доказана; если же a_2 будетъ состав. число, то оно должно дѣлиться на число a_3, которое также будетъ дѣлителемъ и числа a. Разсуждая по предыдущему, получимъ рядъ дѣлителей a_4, a_5, a_6...., величина которыхъ постепенно уменьшается. Если бы допустить, что въ этомъ ряду нѣтъ ни одного первоначальнаго дѣлителя, то мы имѣли бы безконечный рядъ цѣлыхъ чиселъ, которыя меньше числа a, чего быть не можетъ.

111. *Первоначальныхъ чиселъ безконечное множество.* Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что число ихъ ограничено и что наибольшее изъ нихъ есть a; возьмемъ произведеніе всѣхъ первонач. чиселъ отъ 1 до a и положимъ, что $1.2.3.5....a=P$; если придать къ этому произведенію единицу, то число $P+1$ не будетъ дѣлиться ни на одно изъ первоначальныхъ чиселъ отъ 1 до a, ибо $P+1$ есть сумма двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ одно (P) дѣлится на всѣ первоначальныя числа отъ 1 до a, а другое (1) дѣлится только на 1; слѣд. число $P+1$ будетъ или первоначальное, или же будетъ дѣлиться на такое первонач. число, которое больше a.

112. Чтобы узнать, есть ли какое-нибудь число, напр. 631, первоначальное или составное, дѣлимъ его на 2, 3, 5, 7 и т. д. по порядку первонач. чиселъ; находимъ, что оно не дѣлится безъ остатка на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23; раздѣливъ его на 29, получаемъ въ частномъ 21—число, меньшее дѣлителя 29-и; при этомъ дѣленіи также получается остатокъ. Дальше уже нечего продолжать пробы, и можно навѣрное сказать, что данное число есть первонач. Въ самомъ дѣлѣ, если какое-нибудь число дѣлится безъ остатка на другое, то оно должно дѣлиткся также и на частное, происходящее отъ перваго дѣленія; но съ увеличеніемъ дѣлителя частное уменьшается; слѣд. если бы 631 дѣлилось на число большее 29-ти, то оно раздѣлилось бы и на число, меньшее 21; а мы уже видѣли, что ни на одно изъ такихъ чиселъ оно не дѣлится; слѣд. оно не можетъ дѣлиться и на числа, большія 29-ти, и потому 631 есть число первоначальное. Итакъ, *чтобъ узнать, есть ли данное число первоначальное или составное, должно дѣлить его на 2, 3, 5, 7... по порядку первонач. чиселъ, и продолжать эти пробы до тѣхъ поръ, пока не получится въ частномъ число, меньшее дѣлителя; если и при этомъ дѣленіе будетъ съ остаткомъ, то данное число есть первонач.* Такъ, взявъ число 947, дѣлимъ его на первонач. числа отъ 1 до 37; при дѣленіи на 37 получаемъ остатокъ, а въ частномъ число 25, меньшее дѣлителя; поэтому 947 есть число первонач.

Вотъ еще способъ, показывающій, до какихъ поръ нужно производить дѣленіе, чтобы узнать, есть ли данное число первонач. или составное. Такъ какъ какое-нибудь число $a=\sqrt{a}.\sqrt{a}$, то если бы a дѣлилось на число $>\sqrt{a}$ (то есть $>$ цѣлой части этого корня), то оно раздѣлилось бы и на меньшее число; слѣд. цѣлая часть $\sqrt{a}$ представляетъ предѣлъ, до котораго нужно производить пробы. Возьмемъ напр. число 5479; извлекая квадр. корень изъ 5479, найдемъ, что цѣлая часть его$=$74; поэтому нужно пробовать дѣлить только на первонач. числа отъ 1 до 73 включительно.

113. Таблица первоначальныхъ чиселъ. Положимъ, что нужно составить таблицу первонач. чиселъ отъ 1 до 1000. Написавши по порядку всѣ числа отъ 1 до 1000, зачеркнемъ всѣ четныя числа, исключая 2, и всѣ кратныя 3-хъ, оставшіяся незачеркнутыми, напр. 9, 15, 21, 27..., исключая 3-хъ; потомъ зачеркнемъ оставшіяся кратныя 5-ти, исключая 5; послѣ этого всѣ, оставшіяся незачеркнутыми, числа отъ 1 до 7.7, или 49, суть первонач., потому что всѣ кратныя 2, 3, 5, а также кратныя 7, ниже 49-ти, напр. 21, 35, зачеркнуты, такъ какъ первое кратное трехъ, а второе пяти; далѣе—нужно зачеркнуть всѣ кратныя семи; оставшіяся числа отъ 47 до 113 будутъ первоначальными. Потомъ нужно будетъ зачеркнуть всѣ кратныя 11; потомъ 13, 17... до числа 997, послѣдняго остающагося изъ 1000 первыхъ чиселъ, такъ какъ 998, 999 и 1000 уже должны быть зачеркнуты, какъ кратныя двухъ и трехъ. Тогда останутся слѣдующія 169 первонач. чиселъ:

1	41	101	167	239	313	397	467	569	643	733	823	911
2	43	103	173	241	317	401	479	571	647	739	827	919
3	47	107	179	251	331	409	487	577	653	743	829	929
5	53	109	181	257	337	419	491	587	659	751	839	937
7	59	113	191	263	347	421	499	593	661	757	853	941
11	61	127	193	269	349	431	503	599	673	761	857	947
13	67	131	197	271	353	433	509	601	677	769	859	953
17	71	137	199	277	359	439	521	607	683	773	863	967
19	73	139	211	281	367	443	523	613	691	787	877	971
23	79	149	223	283	373	449	541	617	701	797	881	977
29	83	151	227	293	379	457	547	619	709	809	883	983
31	89	157	229	307	383	461	557	631	719	811	887	991
37	97	163	233	311	389	463	563	641	727	821	907	997

Вышеизложенный способъ составленія таблицы первон. чиселъ наз. *Эратосееновымъ рѣшетомъ* (cribrum Eratosthenis). Самая большая таблица (отъ 1 до 3036000) составлена Бурхардтомъ.

114. Числа кратныя одно другого. *Одно число наз. кратнымъ другого, если оно дѣлится на него безъ остатка;* напр. 15 есть кратное 3-хъ, потому что 15 : 3 = 5. *Числа, кратныя двухъ, наз. четными;* напр. 2, 4, 6, 28 будутъ четныя числа. Итакъ, если мы хотимъ узнать, будетъ ли напр. 128 кратнымъ пяти, то должно 128 раздѣлить на 5; такъ какъ при этомъ получимъ остатокъ, то слѣд. 128 не есть кратное 5-ти.

115. Признаки дѣлимости. Часто нужно бываетъ знать, будетъ ли одно число кратнымъ другого, т. е. дѣлится ли одно число на другое безъ остатка; поэтому необходимо, по крайней мѣрѣ для небольшихъ чиселъ, напр. 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, найти такіе способы, по которымъ это можно бы было узнавать сразу, не дѣля даннаго числа на эти числа. Эти способы наз. *признаками дѣлимости.*

116. Выводъ признаковъ дѣлимости основанъ на слѣдующихъ свойствахъ чиселъ. Возьмемъ сумму 24+30+72=126; здѣсь каждое слагаемое дѣлится безъ остатка на 6, слѣд. каждое слагаемое можетъ быть составлено изъ шестерокъ, т. е. изъ частей, равняющихся каждая 6 единицамъ; поэтому и сумма можетъ быть составлена изъ такихъ же частей; въ суммѣ должно быть столько шестерокъ, сколько ихъ есть во всѣхъ слагаемыхъ вмѣстѣ; такъ какъ въ 24 содержится 4 шестерки, въ 30—пять, въ 72—двѣнадцать, то въ суммѣ должно быть ихъ 4+5+12=21. Дѣйствительно, 126 : 6=21. Отсюда заключаемъ, что *если имѣемъ сумму нѣсколькихъ чиселъ, и каждое слагаемое дѣлится безъ остатка на какое-нибудь число, то и сумма раздѣлится безъ остатка на то же число.*

Наоборотъ бываетъ не всегда, т. е. если сумма дѣлится безъ ос-

татка на какое-нибудь число, то слагаемыя могутъ и не дѣлиться; напр. $7+9=16$; 16 дѣлится на 4; а 7 и 9 не дѣлится.

Точно также число 36, дѣлящееся на 9, можно разложить на части 14 и 22, не дѣлящіяся на 9 и т. под.

Если сумма дѣлится безъ остатка на какое-нибудь число, и одно изъ слагаемыхъ дѣлится на это число, то сумма остальныхъ слагаемыхъ также должна дѣлиться; напр. $56=21+9+6+20$; здѣсь сумма 56 и одно слагаемое 21 дѣлятся безъ остатка на 7; поэтому и сумма остальныхъ слагаемыхъ $9+6+20$ также должна раздѣлиться на 7; и дѣйствительно, $9+6+20=35$; а $35:7=5$.

117. Всякое многозначное число представляетъ собой сумму единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.; напр. число $3548=3000+500+40+8$, и изъ предыдущего слѣдуетъ, что если единицы, десятки, сотни и т. д., вообще, если каждый разрядъ даннаго числа дѣлится на какое-нибудь число безъ остатка, то и все число раздѣлится на него безъ остатка. Такъ въ числѣ 3548 каждый разрядъ дѣлится безъ остатка на 4; именно $3000:4=750$; $500:4=125$; $40:4=10$; $8:4=2$; поэтому и все число 3548 должно раздѣлиться на 4; и въ самомъ дѣлѣ, $3548:4=887$.

118. Признакъ дѣлимости на 2. Десять дѣлится безъ остатка на 2, такъ какъ $2.5=10$; слѣд. и 20, 30, 100, 500 и т. д., вообще всѣ десятки, сотни, тысячи и т. д. раздѣлятся на 2 безъ остатка; поэтому если въ какомъ-нибудь числѣ единицы дѣлятся на 2 безъ остатка, или если единицъ вовсе не будетъ, то и все число раздѣлится. Но единицы могутъ раздѣлиться только тогда, когда ихъ будетъ 2, 4, 6, 8, то есть четное число. Итакъ, *на 2 дѣлятся тѣ числа, которыя оканчиваются четною цыфрою или нулемъ.* Напр. 1236, 518, 750, 800 дѣлятся на 2.

119. Признакъ дѣлимости на 4. Сто дѣлится на 4 безъ остатка, потому что $4\times25=100$; слѣд. и всѣ сотни, тысячи и т. д. дѣлятся безъ остатка на 4; поэтому, если въ какомъ-нибудь числѣ десятки и единицы составляютъ число, которое дѣлится на 4, или если единицъ и десятковъ вовсе нѣтъ, то и все число раздѣлится на 4. Итакъ, *на 4 дѣлятся числа, которыя оканчиваются двумя нулями, или у которыхъ десятки и единицы составляютъ число, которое дѣлится на 4.* Напр. въ числѣ 1817568 десятки и единицы составляютъ 68, а $68:4=17$; поэтому и число 1817568 раздѣлится на 4 безъ остатка.

120. Признакъ дѣлимости на 8. Тысяча дѣлится безъ остатка на 8, ибо $1000=8.125$; слѣд. всѣ тысячи, десятки тысячъ и т. д. дѣлятся на 8; поэтому если въ какомъ-нибудь числѣ сотни, десятки и единицы раздѣлятся безъ остатка на 8, или если ихъ вовсе не будетъ, то и все число раздѣлится. Итакъ, *на 8 дѣлятся*

тѣ числа, которыя оканчиваются тремя нулями, или у которыхъ три послѣднія цыфры составляютъ число, которое дѣлится на 8. Напр. 203656 раздѣлится на 8, потому что 656:8=82.

121. Признакъ дѣлимости на 5. Десять дѣлится на 5 безъ остатка; поэтому десятки, сотни, тысячи и т. д. раздѣлятся на 5, и слѣд. если въ какомъ-нибудь числѣ единицы раздѣлятся на 5, или единицъ нѣтъ, то и все число раздѣлится. Но изъ всѣхъ девяти единицъ только 5 можетъ раздѣлиться на 5; поэтому *на 5 дѣлятся безъ остатка числа, оканчивающіяся пятью или нулемъ.* Напр. 15, 30, 45... дѣлятся на 5.

122. Признакъ дѣлимости на 10. Всѣ десятки, сотни и т. д. дѣлятся на 10, а единицы никогда не могутъ дѣлиться, такъ какъ всѣ онѣ меньше 10; слѣд. *на 10 дѣлятся тѣ числа, которыя оканчиваются нулемъ,* напр. 360, 7400 и т. под.

123. Признакъ дѣлимости на 9. Раздѣливъ одинъ десятокъ на 9, получимъ въ частномъ 1 и въ остаткѣ 1; раздѣливъ одну сотню на 9, получимъ въ частномъ 11, а въ остаткѣ опять 1; отъ дѣленія одной тысячи на 9 получимъ въ частномъ 111, а въ остаткѣ опять 1, и т. д.; вообще, если дѣлить на 9 число, состоящее изъ единицы съ нулями, то въ частномъ получимъ число, состоящее изъ цыфры 1, написанной столько разъ сряду, сколько нулей въ дѣлимомъ и въ остаткѣ будетъ всегда 1. Замѣтивъ это, возьмемъ какое-нибудь число, напр. 4536; такъ какъ отъ дѣленія 1000 на 9 получаемъ въ частномъ 111, а въ остаткѣ 1, то отъ дѣленія 4000 на 9, должны получить въ частномъ и въ остаткѣ вчетверо больше, т. е. въ частномъ 444, а въ остаткѣ 4; точно также отъ дѣленія 500 на 9 должны получить частное 55, а остатокъ 5; отъ дѣленія 30 на 9 частное 3 и остатокъ 3. Такъ какъ дѣлимое=дѣлителю, умноженному на частное+остатокъ, то слѣд.

$$4000=9.444+4;$$
$$500=9\,.\,55+5;$$
$$30=9\,.\,3+3; \text{ а потому}$$
$$4536=4.444+9.55+9.3+4+5+3+6.$$

Первыя три слагаемыя, т. е. 9.444, 9.55 и 9.3, дѣлятся безъ остатка на 9, ибо каждое изъ нихъ есть произведеніе нѣкотораго числа на 9; стало быть для того, чтобы число 4536 раздѣлилось на 9, необходимо, чтобы сумма остальныхъ слагаемыхъ, т. е. 4+5+ +3+6, раздѣлилась на 9. Такъ какъ 4+5+3+6=18, а 18 дѣлится на 9, то и 4536 раздѣлится; дѣйствительно, 4536 : 9=504.

Слагаемыя 4, 5, 3, 6 представляютъ цыфры даннаго числа, и, разсуждая по предыдущему, мы можемъ всякое число разложить на двѣ части, изъ коихъ одна будетъ число, кратное 9-ти, а другая будетъ сумма цыфръ даннаго числа, такъ что

всякое число=кратному девяти+сумма цыфръ.

Первое изъ этихъ слагаемыхъ дѣлится на 9; слѣд. дѣлимость числа на 9 зависитъ отъ того, дѣлится ли на 9 сумма его цыфръ. Итакъ, *на 9 дѣлятся тѣ числа, у которыхъ сумма цыфръ дѣлится на 9.*

Напр., чтобъ узнать, дѣлится ли на 9 число 135072, находимъ сумму цыфръ его 1+3+5+0+7+2=18; 18 дѣлится на 9, слѣд. и 135072 раздѣлится. Дѣйствительно, 135072 : 9=15008.

124. Признакъ дѣлимости на 3. Мы сейчасъ видѣли, что

всякое число=кратному девяти+сумма цыфръ.

Первое изъ этихъ слагаемыхъ дѣлится на 3 безъ остатка, ибо оно кратное 9-и, а 9 дѣлится на 3; второе же слагаемое можетъ дѣлиться на 3 и можетъ не дѣлиться; если оно раздѣлится на 3, то и все число раздѣлится. Итакъ, *на 3 дѣлятся безъ остатка тѣ числа, у которыхъ сумма цыфръ дѣлится на 3.* Напр. число 41372 не дѣлится на 3, ибо сумма цыфръ его есть 17.

125. Такъ какъ 9 есть кратное трехъ, то всякое число, дѣлящееся безъ остатка на 9, непремѣнно раздѣлится и на 3; а если число дѣлится на 3, то на 9 оно можетъ и не дѣлиться; напр. 1863 дѣлится на 9, потому оно раздѣлится и на 3; а 1248 дѣлится на 3; будучи же раздѣлено на 9, даетъ въ остаткѣ 6.

Точно также, если число дѣлится на 8, то оно раздѣлится на 2 и на 4. Наоборотъ, если число не дѣлится на 2 и на 3, то оно не раздѣлится на 4, 6, 8, 9.

126. Признакъ дѣлимости на 6. Если число дѣлится безъ остатка на 2 и на 3, то оно раздѣлится и на 6; поэтому, *на 6 дѣлятся безъ остатка такія числа, которыхъ сумма цыфръ дѣлится на 3 и которыя кромѣ того оканчиваются четной цыфрой или нулемъ.* Напр. число 55332 раздѣлится на 6 безъ остатка.

127. Точно также число дѣлится на 12, если оно дѣлится на 3 и 4; на 18 дѣлится всякое четное число, сумма цыфръ котораго дѣлится на 9; на 15 дѣлится такое число, которое дѣлится на 3 и на 5; на 24 дѣлится такое число, которое дѣлится на 3 и на 8.

На 25 раздѣлятся числа, оканчивающіяся двумя нулями или числами 25, 50 и 75.

128. **Признакъ дѣлимости на 11.** Возьмемъ какое-нибудь число, напр. 3675837. Это число равно

3000000+600000+70000+5000+800+30+7.

Но 10=11.1 — 1; 100=11.9+1; 1000=11.91 — 1; 10000==11.909+1...; вообще всѣ нечетныя степени 10-и при дѣленіи на 11 даютъ остатокъ—1, а четныя даютъ+1; поэтому

3000000=кратн. 11+3; 600000=кратн. 11—6;

70000=кратн. 11+7; 5000=кратн. 11—5; 800=кратн. 11+8

30=кратн. 11—3; слѣд. число 3675837=кратному 11-ти+3—6+ +7—5+8—3+7=кратн. 11+(3+7+8+7)—(6+5+3).

Если разность (3+7+8+7)—(6+5+3) раздѣлится безъ остатка на 11, то и данное число раздѣлится на 11. Но 3+7+8+7 есть сумма цыфръ нечетнаго, а 6+5+3 сумма цыфръ четнаго порядка; слѣд. *чтобъ узнать, дѣлится ли число на 11, должно сложить цыфры нечетнаго порядка, потомъ цыфры четнаго порядка, и одну сумму изъ другой вычесть; если въ разности получится 0 или число, дѣлящееся на 11, то и данное* число *раздѣлится на 11.* Напр. въ числѣ 14583206331100297088 сумма цыфръ нечетн. порядка=30; четнаго=41; разность между ними=11; слѣд. число дѣлится на 11.

129. Признакъ дѣлимости на 7 и 13. Возьмемъ какое-нибудь число, напр 525749729495263. Это число= =525000000000000+749000000000+729000000+495000 +263. Но числа 1000, 1000000000..., вообще числа, состоящія изъ единицы съ тремя, 9-ю, 15-ю.... нулями, при дѣленіи на 7 и 13 даютъ въ остаткѣ—1; а числа, состоящія изъ единицы съ 6-ю, 12, 18.... нулями, даютъ въ остаткѣ+1. Поэтому

525000000000000=кратн. 7+525=кратн. 13+525
749000000000=кратн. 7—749=кратн. 13—749
729000000=кратн. 7+729=кратн. 13+729
495000=кратн. 7—495=кратн. 13—495

Слѣд. данное число=кратн. 7 + 525 — 749 + 729 — 495 + 263= =кратн. 13+525—749+729—495+263= =кратн. 7+(525+729+263)—(749+495)= =кратн. 13+(525+729+263)—(749+495).

Разность (525+729+263)—(749+495)=273 дѣлится и на 7, и на 13; поэтому и данное число раздѣлится на этихъ дѣлителей.

Итакъ, *чтобъ узнать, дѣлится ли число на 7 или 13, должно раздѣлить число на грани отъ правой руки, по 3 цыфры въ каждой грани; потомъ найти суммы граней четнаго и нечетнаго порядка и одну сумму изъ другой вычесть; если разность будетъ нуль или число, дѣлящееся на 7 или на 13, то и данное число раздѣлится на этихъ дѣлителей.*

130. Признакъ дѣлимости на 37. Возьмемъ число 74137170644. Такъ какъ 1000, 1000000, 1000000000...., вообще числа, состоящія изъ единицы съ тремя, 6-ю, 9-ю, 12-ю.... нулями, при дѣленіи на 37, даютъ въ остаткѣ 1, то число 74137170644=74000000000+137000000+170000+644= =кратн. 37+(74+137+170+644). Поэтому признакъ дѣлимости на 37 состоитъ въ томъ, что *должно данное число раздѣлить отъ правой руки на грани, по 3 цыфры въ каждой; если сумма этихъ граней раздѣлится на 37, то и данное число раздѣлится.*

131. Разложеніе чиселъ на первоначальныхъ производителей. *Разложить число на первоначальныхъ производителей значитъ представить его въ видѣ произведенія первоначаль-*

ныхъ чиселъ. Положимъ напр., что нужно разложить на первонач. производителей число 630; для этого дѣлимъ его сперва на 2; получимъ въ частномъ 315; это частное уже не раздѣлится безъ остатка на 2, но раздѣлится на 3, потому что сумма цыфръ его=9; поэтому раздѣлимъ 315 на 3; частное 105 опять дѣлимъ на 3; полученное новое частное 35 не дѣлится на 3; раздѣлимъ его на 5, получимъ 7; 7 можетъ раздѣлиться только на 7, и въ частномъ получится 1.

Чтобы ускорить дѣйствіе, необходимо пріучиться дѣлать дѣленіе по сокращенному способу, именно такимъ образомъ: написавши 630, проводимъ вертикальную черту, подлѣ нея ставимъ число 2 и потомъ говоримъ: 2 въ 6 содержится 3 раза; цыфру частнаго пишемъ не подъ дѣлителемъ 2, какъ въ обыкновенномъ дѣленіи, а подъ той цыфрой дѣлимаго, которую дѣлили, то-есть подъ 6-ю;

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

2-жды 3=6; 6 изъ 6—ничего; 2 въ 3 содержится 1 разъ и 1 въ остаткѣ; частное 1 пишемъ подъ второй цыфрой числа 630, а остатокъ 1 въ умѣ; дальше будемъ задаваться уже 2 не въ 0, а 2 въ 10—5 разъ; 2-жды 5=10; остатка нѣтъ. Число 315 дѣлимъ на 3: 3 въ 3 содержится 1 разъ безъ остатка; 3 въ 1 не содержится, пишемъ въ частное 0; 3 въ 15-ти содержится 5 разъ. Получилось число 105, которое опять дѣлимъ на 3; 3 въ 10-ти содержится 3 раза и 1 въ остаткѣ; 3 въ 15-и пять разъ безъ остатка; вышло 35; 35 дѣлимъ на 5, получаемъ 7; 7 дѣлимъ на 7, получаемъ въ частномъ 1.

Такимъ образомъ видно, что этотъ новый сокращенный способъ дѣленія отличается отъ показаннаго нами прежде (§§ 62 и 66) тѣмъ, что въ немъ частное пишется не подъ дѣлителемъ, а подъ дѣлимымъ, и тѣмъ еще, что въ томъ способѣ мы умножаемъ полученную цыфру частнаго на дѣлителя, потомъ вычитаемъ изъ дѣлимаго и *пишемъ* остатокъ; а здѣсь и умноженіе, и вычитаніе дѣлаются въ умѣ. Хорошо бы употреблять этотъ способъ и всегда; но если дѣлитель будетъ довольно большое число, то, производя умноженіе и вычитаніе въ умѣ, легко сдѣлать ошибку; но при разложеніи числа на первоначальныхъ дѣлителей приходится дѣлить на 2, на 3, 5...., то есть на числа небольшія, поэтому къ такому способу легко можно привыкнуть.

Такъ какъ дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, то 630=2.315; но 315=3.105, слѣд. 630=2.3.105; а 105=3.35, слѣд. 630=2.3.3.35; 35=5.7, поэтому 630=2.3.3.5.7. Такимъ образомъ *всякое составное число можно представить въ видѣ произведенія нѣсколькихъ первоначальныхъ чиселъ*, или *разложить на первоначальныхъ множителей*.

Число 630 можетъ дѣлиться на каждаго изъ своихъ первоначальныхъ производителей и на всѣ произведенія, изъ нихъ составленныя такъ, чтобы каждый первоначал. множитель 630-ти повторялся въ нихъ самое большое столько разъ, сколько разъ онъ повторяется въ 630-ти: напр. на 2.3=6, на 2.3.5=30; на 2.3.5.7=210.

Итакъ, *чтобы разложить число на первонач. множителей, должно его дѣлить на 2, если только оно кратно двумъ; полученное частное опять дѣлить на 2 и т. д., пока не получится число, которое уже не можетъ дѣлиться на 2; это число надо дѣлить, если можно, на 3, потомъ на 5, на 7 и т. д. по порядку первоначальныхъ чиселъ, пока въ частномъ не получится 1.*

132. Чтобы доказать, что всякое *составное число можно представить въ видѣ произведенія первоначальныхъ множителей*, возьмемъ составное число N; оно, какъ мы видѣли (§ 110), должно имѣть хотя одного первоначальнаго дѣлителя, напр. a. Пусть частное отъ дѣленія N на a есть q; тогда $N=aq$; если q есть первон. число, то теорема доказана. Если же q составное, то оно должно имѣть первон. дѣлителя a_1, и, означивъ частное отъ дѣленія q на a_1 черезъ q_1, получимъ $q=a_1q_1$, и слѣд. $N=aa_1q_1$. Если q_1 число первонач., то теорема доказана; если же q_1 число составное, то, сохраняя предыдущее обозначеніе, получимъ $N=aa_1a_2q_2$; затѣмъ, если q_2 составное число, то $N=aa_1a_2a_3q_3$ и т. д.; наконецъ получимъ выраженіе $N=aa_1a_2a_3....a_nq_n$, гдѣ q_n есть число первоначальное; дѣйствительно, частныя q_1, q_2, q_3... постоянно уменьшаются; слѣд., допустивши, что онѣ всѣ суть числа составныя, мы должны допустить, что существуетъ безконечное множество чиселъ, меньшихъ опредѣленнаго числа q. Итакъ, число N есть произведеніе первоначальныхъ множителей a, a_1 a_2... a_n и q_n.

133. Разлагая на первоначальныхъ множителей числа 10, 100, 1000..., найдемъ, что 10=2.5; 100=2.2.5.5; 1000=2.2.2.5.5.5; 10000=2.2.2.2.5.5.5.5 и т. д.; вообще, *число, состоящее изъ единицы съ нулями, состоитъ изъ производителей 2 и 5, взятыхъ столько разъ сколько нулей.*

134. Нахожденіе всѣхъ точныхъ дѣлителей даннаго числа. *Найти всѣхъ точныхъ дѣлителей даннаго числа значитъ найти всѣ числа, какъ первоначальныя, такъ и составныя, на которыя данное число можетъ дѣлиться безъ остатка. Для этого должно разложить данное число на первонач. множителей и перемножить ихъ между собою по два, по три, по четыре... словомъ составить изъ нихъ всевозможныя произведенія.*

Напр., чтобы найти всѣхъ точныхъ дѣлителей числа 720, разложимъ его на первонач. производит.; найдемъ 720 =1.2.2.2.2.3.3.5. Выпишемъ теперь каждый порядокъ производителей: 1, 2, 2, 2, 2; 1, 3, 3; 1, 5. Перемножимъ ихъ между собой такимъ образомъ: 1, 2, 4, 8, 16; 1, 3, 9; 1, 5. Теперь 1, 2, 4, 8, 16 помножимъ сперва на 1, потомъ на 3, потомъ на 9, и наконецъ всѣ полученныя числа помножимъ на 5. Дѣйствіе это обыкновенно означается такъ:

$$\{(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16)\ .\ (1,\ 3,\ 9)\}\quad (1,\ 5).$$

Помножая 1, 2, 4, 8, 16 на 1, получимъ: 1, 2, 4, 8, 16; помножая на 3, получимъ: 3, 6, 12, 24, 48; помножая на 9, получимъ: 9, 18, 86, 72, 144.

Наконецъ, помноживъ всѣ полученныя числа на 5, получимъ: 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240, 45, 90, 180, 360, 720.

Итакъ, 720 дѣлится безъ остатка на слѣдующія числа:

1, 2, 4, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 9, 18, 36, 72, 144, 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240, 45, 90, 180, 360, 720, и больше ни на какія числа (напр. на 7, 25, 32) дѣлиться не можетъ.

135. Когда число разложено на первовач. производит., то легко разсчитать, сколько оно будетъ имѣть всѣхъ точныхъ дѣлителей. Такъ число $720=1.2.2.2.2.3.3.5=1.2^4.3^2.5$; поэтому оно будетъ имѣть 5, или $4+1$, дѣлителей 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4; умножая каждаго изъ этихъ дѣлителей на 3 и на 3^2, получимъ 10, или 5.2, новыхъ дѣлителей; слѣд. число $1.2^4 3^2$ имѣетъ всего 15, или $5.3=(4+1).(2+1)$ дѣлителей. Умножая каждаго изъ этихъ 15 дѣлителей на 5, получимъ 15 новыхъ дѣлителей числа 720; слѣд. всѣхъ дѣлителей будетъ $30=15.2=$ $=(4+1).(2+1).(1+1)$. Вообще, если число $N=1.a^m b^n c^p d^q$, гдѣ a, b, c, d, суть числа первоначальныя, то число всѣхъ точныхъ дѣлителей его равно $(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)$. Напр. $6300=2.2.3.3.5.5.7$ имѣетъ $3.3.3.2=54$ точныхъ дѣлителя.

136. Общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ. Возьмемъ числа 40, 60 и 30; всѣ они дѣлятся безъ остатка на 2, на 5 и на 10; поэтому 2, 5 и 10 суть *общіе* дѣлители чиселъ 40, 60 и 30. Итакъ, *общимъ дѣлителемъ нѣсколькихъ данныхъ чиселъ наз. число, на которое всѣ эти числа могутъ дѣлиться безъ остатка.* Больше 10 уже нѣтъ числа, на которое бы дѣлились и 40, и 60, и 30; такъ напр. 40 и 60 дѣлятся еще на 20, а 30 не дѣлится на 20; 60 и 30 дѣлятся на 30, а 40 не дѣлится. Такимъ образомъ 10 есть общій дѣлитель чиселъ 40, 60, и 30, и вмѣстѣ съ тѣмъ *наибольшій* дѣлитель, т. е. больше его уже нѣтъ никакого общаго дѣлителя. Итакъ, *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ нѣсколькихъ чиселъ наз. самое большее изъ тѣхъ чиселъ, на которыя всѣ данныя числа могутъ дѣлиться безъ остатка.*

137. Положимъ, что требуется найти общ. наиб. дѣлит. чиселъ, 180, 270 и 360. Для этого разложимъ ихъ на первонач. множителей:

$$180=2.2.3.3.5$$
$$270=2.3.3.3.5.$$
$$360=2.2.2.3.3.5.$$

Выпишемъ теперь производителей общихъ (т. е. такихъ, которые находятся во всѣхъ этихъ числахъ) 2,3,3,5 и перемножимъ ихъ; $2.3.3.5=90$; число 90 и будетъ общ. наиб. дѣлит. чиселъ 180, 270 и 360.

Итакъ, *чтобы найти общ. наиб. дѣлит. нѣсколькихъ чиселъ, должно эти числа разложить на первонач. производ., потомъ выписать всѣхъ общихъ производителей* (т. е. такихъ, которые

находятся во всѣхъ данныхъ числахъ) *и этихъ производителей перемножитъ; полученное произведеніе и будетъ общ. наибол. дѣлит.*

138. Числа взаимно простыя. *Тѣ числа, которыя имѣютъ общ. наиб. дѣлителемъ единицу, наз. взаимно простыми или первыми между собою.* Такъ напр. числа 10 и 21, 15 и 16 будутъ первыми между собою, потому что 10=2.5, а 21=3.7; слѣд. общ. наиб. дѣл. ихъ=1; также 15=3.5, а 16=2.2.2.2; слѣд., общ. наиб. ихъ дѣл. опять=1. Не должно смѣшивать числа первоначальныя съ первыми, или взаимно простыми; первоначальныя тѣ, которыя не дѣлятся ни на какія числа, кромѣ единицы и самихъ себя; а взаимно простыя числа могутъ быть и составными, т. е. могутъ дѣлиться на другія числа, но имѣютъ *общимъ дѣлителемъ* только единицу; напр. 28, 27, 25, 77 числа составныя, но первыя между собой. Понятно, что в*сѣ первоначальныя числа суть* в*мѣстѣ съ тѣмъ и* в*заимно простыя.*

139. Нахожденіе общ. наибол. дѣлит. по способу послѣдовательнаго дѣленія. Возьмемъ напр. числа 575 и 200. Общ. наиб. дѣлит. ихъ не можетъ быть больше 200, потому что 200 не можетъ раздѣлиться на число, которое больше его; попробуемъ, не будетъ ли само 200 общ. наиб. дѣлителемъ 575 и 200; 200 само на себя дѣлится, и если 575 раздѣлится на 200, то 200 и будетъ общ. наиб. дѣлит.; раздѣливъ 575 на 200, получимъ въ частномъ 2 и въ остаткѣ 175; итакъ 200 не есть общ. наиб. дѣлитель. Но дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное,+остатокъ; слѣд. 575=200.2+175. Если на какое-нибудь число раздѣлятся безъ остатка 575 и 200, то на это же число должно дѣлиться безъ остатка и 175, потому что 575 есть сумма двухъ слагаемыхъ 200.2 и 175; а если сумма двухъ чиселъ и одно изъ слагаемыхъ дѣлятся на какое-нибудь число, то на то же число должно раздѣлиться и другое слагаемое; но 175 не можетъ раздѣлиться на число, большее его, слѣд. и общ. наиб. дѣлитель 575 и 200 не можетъ быть больше 175, но равенъ ему быть можетъ; поэтому попробуемъ, не есть ли 175 общ. наиб. дѣлит. Для этого должно бы 575 и 200 раздѣлить на 175; но достаточно раздѣлить только 200, потому что мы уже видѣли, что 575=200.2+175; 175 само на себя дѣлится, и слѣд. если 200 раздѣлится на 175, то и 575 также раздѣлится. Раздѣливши 200 на 175, получимъ въ частномъ 1, а въ остаткѣ 25. Докажемъ теперь, что общ. наиб. дѣлитель чиселъ 575 и 200 не можетъ быть больше второго остатка 25. Мы уже видѣли, что общ. наиб. дѣлит. данныхъ чиселъ долженъ дѣлить безъ остатка 175; но 200=175.1+25, и если на какое-нибудь число дѣлятся безъ остатка 200 и 175, то на это число должно дѣлиться и 25; а такъ какъ 25 не можетъ раздѣлиться на число, большее 25-ти, то и общ. наиб. дѣл. не можетъ быть больше 25. Чтобъ узнать, не будетъ ли само 25 общ.

наиб. дѣлит., раздѣлимъ 175 на 25; такъ какъ $200 = 175 . 1 + 25$, а 25 само на себя дѣлится, то слѣд. если 175 раздѣлится на 25, то и 200 раздѣлятся на 25; а мы уже видѣли, что если 175 и 200 раздѣлятся на какое-нибудь число, то и 575 также раздѣлится. Раздѣливши 175 на 25, не получимъ остатка; слѣд. 25 и будетъ общ. наиб. дѣлит. чиселъ 575 и 200.

Посмотримъ теперь, какія дѣйствія мы производили для нахожденія общ. наиб. дѣлит. чиселъ 575 и 200. Мы дѣлили 575 на 200, т. е. большее число на меньшее; потомъ 200 дѣлили на остатокъ 175; потомъ первый остатокъ 175 на второй остатокъ 25. Итакъ, *чтобы найти общ. наиб. дѣлит. двухъ чиселъ, должно большее число раздѣлить на меньшее, меньшее на первый остатокъ, первый остатокъ на второй, второй на третій и т. д. до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится нуль; послѣдній дѣлитель и будетъ общ. наиб. дѣлителемъ.*

Этотъ способъ нахожденія общ. наиб. дѣлит. наз. *способомъ послѣдовательнаго дѣленія.*

Дѣйствіе обыкновенно располагается въ слѣдующемъ порядкѣ:

```
            575 | 200
            400 | 2
       200 | 175
       175 | 1
  175 |  25
  175 | 7
    0
```

Можно также располагать дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

	2	1	7
575	200	175	25
400	175	175	
175	25	0	

Здѣсь частныя пишемъ не *подъ* дѣлителями, а *надъ* ними.

Примѣры. Общ. наиб. дѣлит. чиселъ: 74585 и 25572 есть 2131; числа 2991 и 1453 суть первыя между собою, и т. под.

140. Положимъ, что по способу послѣдовательнаго дѣленія требуется найти общ. наиб. дѣлит. чиселъ 1320, 360 и 700. Для этого найдемъ сначала общ. наиб. дѣлит. между двумя изъ этихъ чиселъ, напр. между 1320 и 360; онъ будетъ 120, а потому наиб. дѣлит. всѣхъ трехъ данныхъ чиселъ не можетъ быть больше 120, и чтобы найти его, должно найти общ. наиб. дѣлит. между 120 и 700. Сдѣлавъ это, получимъ число 20, которое и будетъ общ. наиб. дѣл. 1320, 360 и 700. Вообще, *если дано нѣсколько чиселъ, то должно найти общ. наиб. дѣлит. между какими-нибудь двумя изъ этихъ чиселъ; потомъ между третьимъ числомъ и полученнымъ наиб.*

дѣлит.; даже между четвертымъ числомъ и новымъ дѣлителемъ, и т. д.; послѣдній дѣлитель и будетъ общій наиб. дѣлитель всѣхъ данныхъ чиселъ.

141. Нахожденіе общ. наиб. дѣлит. по способу послѣдовательнаго дѣленія въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ быть упрощено. Возьмемъ напр. числа 8920 и 14049. По признакамъ дѣлимости видно, что первое число дѣлится на 5 и на 8, то-есть на 40; а второе на эти числа не дѣлится; второе дѣлится на 9, а первое не дѣлится; слѣд. множители 40 и 9 не могутъ входить въ составъ общ. наиб. дѣлит.; поэтому можно раздѣлить 8920 на 40, а 14049 на 9 и искать общ. наиб. дѣл. чиселъ 223 и 1561; общ. наиб. дѣлит. этихъ чиселъ 223 и будетъ наиб. дѣлит. данныхъ чиселъ.

Положимъ еще, что нужно найти общ. наиб. дѣл. 7830 и 10962; по признакамъ дѣлимости видно, что оба числа дѣлятся на 18; слѣд. 18 непремѣнно войдетъ множителемъ въ общ. наиб. дѣл., и потому дѣйствіе укоротимъ, если, раздѣливши 7830 и 10962 на 18 найдемъ общ. наиб. дѣлит. чиселъ 435 и 609 и умножимъ его на 18; получимъ 87.18=1566.

142. Если при нахожденіи общ. наиб. дѣлит. по способу послѣдоват. дѣленія получимъ въ какомъ-нибудь остаткѣ число первоначальное, и прежній дѣлитель на это число не дѣлится, то можно, не продолжая дѣйствія, заключить, что данныя числа первыя между собою. Возьмемъ напр. числа 5673 и 2813. Раздѣливъ 5673 на 2813, находимъ въ частномъ 2 и въ остаткѣ 47, раздѣливъ 2813 на 47, получимъ также остатокъ; общ. дѣлит. чиселъ 5673 и 2813 долженъ, какъ мы видѣли, раздѣлить безъ остатка и 47; а 47, какъ число первонач., дѣлится только на единицу и само себя, и такъ какъ оно само не есть общ. дѣлит., то общ. дѣлит. можетъ быть только 1.

Положимъ еще, что даны числа 827 и 646, и мы уже знаемъ, что 827 есть число первоначальное. Такъ какъ 827 можетъ дѣлиться только на само себя и на единицу, и при томъ само оно не можетъ быть общ. дѣлит., потому что оно > 646, то заключаемъ, что 827 и 646 числа взаимно простыя. Если же возьмемъ два числа, изъ которыхъ меньшее будетъ первонач., напр. 17639 и 223, то общ. наиб. дѣлит. ихъ будетъ или 223 или 1; 17639 на 223 не дѣлится, слѣд. данныя числа взаимно простыя.

143. *Раздѣливъ числа на ихъ общ. наиб. дѣлит., получимъ въ частныхъ числа первыя между собою*; такъ отъ дѣленія чиселъ 7830 и 10962 на ихъ общ. наиб. дѣлителя 1566 получаемъ частныя 6 и 7. Вообще, если имѣемъ числа a, b, c..., которыхъ наиб. дѣлит.$=q$, то $a=mq$; $b=nq$, $c=pq$... Если бы допустили, что m, n, p.., имѣютъ хоть одного общаго дѣлителя q_1, то $m=m_1q_1$; $n=n_1q_1$; $p=p_1q_1$...; поэтому $a=m_1q_1q$: $b=n_1q_1q$; $c=p_1q_1q$..., то есть наиб. дѣлит. былъ бы q_1q, а не q; слѣд. m, n, p,.. числа взаимно простыя.

144. Наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ. Возьмемъ нѣсколько чиселъ, напр. 8, 6, 4. Есть множество чиселъ, которыя кратны 8, 6 и 4-мъ, напр., 24, 48, 62, 144....; но меньше 24 нѣтъ ни одного числа, которое бы дѣлилось и на 8, и на 6, и на

4; такъ напр. 16 дѣлится на 8 и на 4, но не дѣлится на 6; 12 дѣлится на 6 и 4, но не дѣлится на 8. Число 24 наз. *наименьшимъ кратнымъ* чиселъ 8, 6, 4. Итакъ, *наименьшимъ кратнымъ нѣсколькихъ чиселъ наз. самое меньшее изъ всѣхъ чиселъ, которыя могутъ дѣлиться на всѣ данныя числа безъ остатка.*

145. Пусть требуется найти наим. кратн. чиселъ 60, 80 и 50. Для этого разложимъ ихъ на первонач. производ.; получимъ:

60=2.2.3.5; 80=2.2.2.2.5; 50=2.5.5.

Самое меньшее изъ чиселъ, могущихъ дѣлиться на 60, есть 60; если хотимъ составить число, которое дѣлилось бы и на 60, и на 80, то въ него должны входить тѣ же производители, которые входить въ 60 и 80; но 80 = 2.2.2.2.5; а 60 = 2.2.3.5; поэтому къ производителямъ числа 60 должно присоединить только 2.2, и получимъ 2.2.3.5.2.2. Если хотимъ, чтобы число дѣлилось и на 50, то въ него должны входить производ., изъ которыхъ состоитъ 50, то есть 2.5.5; но въ числѣ 2.2.3.5.2.2 уже есть 2, а также 5 есть одинъ разъ; поэтому должно прибавить только еще одинъ разъ пять; получимъ 2.2.2.2.3.5.5=1200.

Число 1200 дѣлится на 60, 80 и 50 безъ остатка; притомъ есть безконечное множество чиселъ, большихъ 1200 и дѣлящихся на 60, 80 и 50 безъ остатка, какъ напр. 2400, 3600....; вообще нужно только 1200 помножить на какое угодно число—и получимъ число, кратное 60, 80 и 50; но менѣе 1200 нѣтъ числа, которое бы дѣлилось въ одно время на 60, на 80 и на 50; слѣд. 1200 есть наимен. кратное. Итакъ, *чтобы найти наим. крат. нѣсколькихъ чиселъ, должно эти числа разложить на первонач. производителей, потомъ взять производит. одного какого-нибудь числа и прибавить къ нимъ тѣхъ производит., которыхъ въ этомъ числѣ недостаетъ противъ другихъ чиселъ; наконецъ всѣхъ этихъ производителей перемножить.*

Напр. чтобы найти наим. крат. 360, 144, 720, 480, 540, разложимъ эти числа на первонач. производителей:

360=2.2.2.3.3.5	144=2.2.2.2.3.3
720=2.2.2.2.3.3.5	480=2.2.2.2.2.3.5
540=2.2.3.3.3.5	

Взявъ производителей какого-нибудь числа, напр. 360, видимъ что къ нимъ изъ 144 нужно прибавить 2; изъ 720 ничего не нужно прибавлять; изъ 480-ти 2, изъ 540-а 3; слѣд.
наим. крат.=2.2.2.3.3.5.2.2.3=4320.

Найдемъ еще наим. крат. чиселъ 56, 225 и 143. Такъ какъ 56=2.2.2.7; 225=3.3.5.5; 143=11.13, то слѣд. данныя числа не имѣютъ общихъ производителей, и, взявъ производителей какого-нибудь числа, напр. 56, къ нимъ нужно присоединить всѣхъ производителей прочихъ чиселъ; слѣд. *наим. кратное чиселъ первыхъ между собою равно произведенію этихъ чиселъ.*

146. Вотъ еще два способа нахожденія наименьшаго кратнаго.

1) Возьмемъ числа 144, 720, 480, 540, 45.

Напишемъ эти числа въ горизонтальной строкѣ; за послѣднимъ числомъ 45 проведемъ вертикальную черту. Видимъ, что первыя четыре числа дѣлятся безъ остатка на 2; раздѣлимъ ихъ на 2 и частныя

144	720	480	540	45	2
72	360	240	270	45	2
36	180	120	135	45	2
18	90	60	135	45	2
9	45	30	135	45	2
9	45	15	135	45	3
3	15	5	45	15	3
1	5	5	15	5	3
1	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	

72, 360, 240, 270 напишемъ подъ данными числами; число же 45, которое не дѣлится на 2, перепишемъ безъ измѣненія. Частныя 72, 360, 240, 270 опять дѣлимъ на 2 и полученныя новыя частныя пишемъ подъ прежними; число же 45 оставляемъ безъ перемѣны. Продолжая такимъ образомъ, получимъ числа 9, 45, 15, 135, 45, которыя уже не дѣлятся на 2; дѣлимъ ихъ на 3, полученныя частныя опять дѣлимъ на 3 и т. д.; находимъ числа 1, 5, 5, 5, 5; 1 переписываемъ безъ измѣненія, а остальныя числа дѣлимъ на 5; получаемъ наконецъ 1, 1, 1, 1, 1. Произведеніе всѣхъ дѣлителей 2.2.2.2.2.3.3.3.5=4320 и будетъ наим. кратн.

2) Пусть даны числа a и b; означимъ ихъ общ. наиб. дѣлит. черезъ p, а частныя отъ дѣленія этихъ чиселъ на p означимъ q и q_1; тогда pqq_1 будетъ наим. кратн. чиселъ a и b. Дѣйствительно, такъ какъ $a=pq$, $b=pq_1$, то pqq_1 дѣлится на a и b; притомъ q и q_1 числа взаимно простыя (§ 143); слѣд. произведеніе pqq_1 не содержитъ ни одного множителя, лишняго для дѣлимости въ одно и то же время на $pq=a$ и $pq_1=b$; т. е. оно есть наим. кратное. Такъ какъ $pq=a$, то $pqq_1=aq_1$, и слѣд. *для нахожденія наим. кратн. двухъ чиселъ, должно найти ихъ общ. наиб. дѣлит., потомъ одно изъ данныхъ чиселъ раздѣлить на этого дѣлителя и полученное частное умножить на другое данное число.* Напр., чтобъ найти наим. кратн. чиселъ 480 и 720, находимъ ихъ общ. наиб. дѣлит.; онъ=240; 480 : 240=2; слѣд. наим. кратн.=720 . 2=1440. Такъ какъ общ. наиб. дѣлит. можетъ быть найденъ помощью послѣдовательнаго дѣленія, то вышеизложенный способъ даетъ возможность находить наим. кратн., не разлагая данныхъ чиселъ на первонач. дѣлителей.

Если дано нѣсколько чиселъ: a, b, c, d, то для нахожденія ихъ наим. кратн. находимъ сперва наим. кратн. двухъ изъ нихъ, напр. a и b; пусть оно будетъ N; потомъ находимъ наим. кратн. N и c, пусть оно будетъ N_1; наконецъ находимъ наим. кратн. N_1 и d; оно и будетъ наим. кратн. всѣхъ данныхъ чиселъ.

147. Вопросы. 1) Какія числа наз. первоначальными? составными? 2) Какъ узнать, есть ли данное число, напр. 379, первоначальное или составное? 3) Пересчитать первонач. числа между 20-ю и

50-ю? между 50-ю и 80-ю? отъ 80 до 100? 4) Когда одно число наз. кратнымъ другого? 5) Назовите нѣсколько чиселъ кратныхъ 5-и? 8-и? 10-и? 6) Какія числа наз. четными? 7) Пересчитать четныя числа между 10-ю и 20-ю? 20-ю и 50-ю? 8) Перечислить между 1 и 20 всѣ четныя числа, кратныя 3-мъ? 9) Перечислить между 1 и 100 числа кратныя семи? девяти? восьми? десяти? пяти? шести? 12-и? 24-хъ? 20-и? 25-и? 36-и? 40-а? 50-и? 10) Если какое-нибудь число кратно 20-ти, то на какія числа оно еще должно дѣлиться безъ остатка? 11) Что наз. признаками дѣлимости? 12) Какія числа дѣлятся безъ остатка на 2? 4? 8? 5? 10? 9? 3? 6? 13) Какіе признаки дѣлимости на 12? 25? 18? 36? 50? 100? 14) Что значитъ разложить число на первоначальныхъ множителей? 15) Какъ разложить число на первонач. производ.? 16) Изъ какихъ первонач. производит. состоитъ 10, 100, 1000..., вообще единица съ нулями? 17) Изобразить число 10000 въ видѣ произведенія нѣсколькихъ первонач. производит.? 18) Что значитъ найти всѣхъ точныхъ дѣлителей даннаго числа? Какъ это сдѣлать? 19) Какъ узнать, сколько точныхъ дѣлителей имѣетъ данное число? 20) Что наз. общимъ дѣлителемъ нѣсколькихъ чиселъ? 21) Что наз. общ. наиб. дѣлит. нѣсколькихъ чиселъ? 22) Назовите нѣсколько чиселъ, которыя имѣли бы общ. дѣлит. 3? 5? 10? 15? 40? 28? 23) Какого общ. дѣлит. имѣютъ всѣ четныя числа? 24) Назовите нѣсколько чиселъ, которыя имѣли бы общ. наиб. дѣлит. 5? 12? 30? 25) Назовите 4 такихъ числа, чтобы одно изъ нихъ было общ. наиб. дѣлит. всѣхъ этихъ чиселъ? 26) Какъ найти общ. наиб. дѣлит. нѣсколькихъ чиселъ посредствомъ разложенія ихъ на первонач. множителей? 27) Какъ найти общ. наиб. дѣлит. двухъ чиселъ по способу послѣдовательнаго дѣленія? 28) Какъ найти общ. наиб. дѣлит. нѣсколькихъ чиселъ по способу послѣдоват. дѣленія? 29) Чему равняется общ. наиб. дѣл. первоначальныхъ чиселъ? 30) Какія числа наз. взаимно простыми? 31) Все ли равно: числа первоначальныя и первыя между собою? 32) Назовите 4 составныхъ числа, первыхъ между собою? 33) Даны числа 428 и 107; 107 есть число первонач.; общ. наиб. дѣлит. данныхъ чиселъ будетъ или 107 или 1; почему это? 34) Что наз. наименьшимъ кратнымъ нѣсколькихъ чиселъ? Какъ его найти? 35) Какое число будетъ наимен. кратн. 8-и и 10-ти? 36) Назовите нѣсколько чиселъ, кратныхъ 8 и 7? 9 и 5? 30 и 15? 37) Какое будетъ наим. крат. 4, 6, 12? 8, 15, 6, 3, 2? 12, 36, 24, 3, 8, 72? 38) Можно ли найти наибольшее кратное нѣсколькихъ чиселъ? 39) Какъ найти наим. крат. нѣсколькихъ взаимно простыхъ чиселъ? нѣсколькихъ первонач. чиселъ?

148. Нѣкоторыя теоремы о числахъ.

Теорема 1. *Если числа* a, a_1, a_2, *при дѣленіи на одно число* p, *даютъ остатки*, r, r_1, r_2, *то, раздѣливъ на* p *сумму этихъ чиселъ, получимъ такой же остатокъ, какой получится отъ дѣленія на* p *суммы прежнихъ остатковъ* $r+r_1+r_2$.

Означивъ q, q_1, q_2 частныя отъ дѣленія a, a_1, a_2 на p, имѣемъ $a=pq+r$; $a_1=pq_1+r_1$; $a_2=pq_2+r_2$; слѣд. $a+a_1+a_2=p.(q+q_1+q_2)+$ $+r+r_1+r_2$. Если сумма $r+r_1+r_2<p$, то ее нельзя раздѣлить на p, слѣд., она сама себѣ служитъ остаткомъ, и изъ формулы видно, что

остатокъ отъ дѣленія суммы $a+a_1+a_2$ на p равенъ *остатку* отъ дѣленія $r+r_1+r_2$ на p. Если же $r+r_1+r_2>p$, то раздѣливши эту *сумму* на p и означивъ частное Q, а остатокъ R, получимъ

$r+r_1+r_2=p.Q+R$, и слѣд.

$a+a_1+a_2=p(q+q_1+q_2+Q)+R$, что и требовалось доказать.

Возьмемъ напр. 17+16+19+10=61; раздѣлимъ *каждое слагаемое* на 7; остатокъ отъ перваго *слагаемаго*=3; отъ 2-го=1; отъ 3-го=5; отъ 4-го=3; раздѣлимъ сумму остатковъ 12 на 7, получимъ тотъ же остатокъ 5, какой получится отъ дѣленія 61 на 7.

Изъ этой теоремы вытекаетъ нѣсколько слѣдствій, а именно:

1) *Если каждое слагаемое дѣлится на какое-нибудь число безъ остатка, то и сумма раздѣлится*; въ этомъ случаѣ остатокъ каждаго слагаемаго=0, а потому и остатокъ суммы=0.

2) *Если число a дѣлится безъ остатка на p, то и всякое кратное a*, напр. *ma, раздѣлится на p*. Такъ какъ $ma=a+a+a+\ldots$ и каждое слагаемое a дѣлится на p, то (слѣд. 1) и сумма *ma* также раздѣлится. Это предложеніе можно выразить еще такъ: *если одинъ изъ производителей дѣлится* на *какое-нибудь число, то и произведеніе раздѣлится на это число.*

3) *Если имѣемъ сумму двухъ чиселъ $b+c=a$, и одно изъ слагаемыхъ b дѣлится безъ остатка на* p, *а другое c не дѣлится на p, то и сумма* не *раздѣлится, и остатокъ отъ дѣленія на p суммы a будетъ такой же*, *какъ отъ дѣленія на p слагаемаго c.* Напр. 16 дѣлится на 8; а 10, раздѣленное на 8, даетъ въ остаткѣ 2; при дѣленіи 26=16+10 на 8 получимъ въ остаткѣ также 2.

4) *Если сумма $b+c$ дѣлится на p и одно изъ слагаемыхъ дѣлится, то и другое также должно дѣлиться*, ибо еслибъ оно не дѣлилось, то (слѣд. 3) и сумма бы не дѣлилась.

5) *Если уменьшаемое и вычитаемое дѣлятся на какое-нибудь число, то и разность раздѣлится на то же число, потому* что уменьшаемое=вычитаемому+разность.

6) *Если дѣлимое a и дѣлитель b дѣлятся на* c, *то и остатокъ r долженъ дѣлиться* на c. Означивъ q частное отъ дѣленія a на b, получимъ $a=bq+r$; такъ какъ a дѣлится на c и b дѣлится на c, то bq дѣлится на c, а потому (слѣд. 4) и r раздѣлится на c.

Теорема 2. *Если число a дѣлится безъ остатка на произведеніе bc, то оно будетъ дѣлиться и на каждаго производителя b* и *c*. Если $a:bc=q$, то $a=bcq$, а $a:b=cq$, $a:c=bq$, гдѣ cq и bq суть числа цѣлыя, такъ какъ они представляютъ произведенія двухъ цѣлыхъ чиселъ. Очевидно, что эта теорема справедлива и для нѣсколькихъ производителей.

Теорема 3. *Если числа a_1 и a_2 при дѣленіи* на *число p даютъ равные остатки, то разность ихъ a_1-a_2 раздѣлится на p безъ остатка.* Означимъ частныя черезъ q_1 и q_2, а остатокъ r; тогда

$a_1=pq_1+r$; $a_2=pq_2+r$; слѣд. $a_1-a_2=p.(q_1-q_2)$, или

$(a_1-a_2):p=q_1-q_2$, гдѣ q_1-q_2 есть цѣлое число. Напр. отъ дѣленія 174 на 24 и 30 на 24 получаемъ въ остаткѣ 6; и 174 — 30 = 144 дѣлится на 24 безъ остатка.

Теорема 4. *Если* числа *a_1 и a_2, по раздѣленіи ихъ на число p, даютъ остатки r_1 и r_2 то, раздѣливъ на p произведеніе a_1a_2*

этихъ чиселъ, получимъ тотъ же остатокъ, какой выйдетъ отъ дѣленія на p произведенія r_1r_2 прежнихъ остатковъ; иначе говоря—*произведеніе двухъ чиселъ, при дѣленіи на какое-нибудь число, равноостаточно съ произведеніемъ ихъ остатковъ.* Положимъ, что отъ дѣленія a_1 и a_2 получаются въ частномъ q_1 и q_2; тогда $a_1=pq_1+r_1$ и $a_2=pq_2+r_2$. Перемноживъ эти выраженія, получимъ

$$a_1a_2=p^2q_1q_2+pq_2r_1+pq_1r_2+r_1r_2, \text{ или}$$
$$a_1a_2=p(pq_1q_2+q_2r_2+q_2r_1)+r_1r_2.$$

Если $r_1r_2<p$, то оно само служитъ себѣ остаткомъ, а изъ формулы видно, что остатокъ отъ дѣленія a_1a_2 на p равенъ остатку отъ дѣленія r_1r_2 на p. Если же r_1r_2 больше p, то раздѣливъ его на p и положивъ частное $=Q$, а остатокъ $=R$, получимъ:

$$a_1a_2=p\ (pq_1q_2+q_2r_1+q_1r_2)+pQ+R, \text{ или}$$
$$a_1a_2=p\ (pq_1q_2+q_2r_1+q_1r_2+Q)+R,$$

что и требовалось доказать. Напр. 572 и 75, по раздѣленіи на 17, даютъ остатки 11 и 7; поэтому 572.75, будучи раздѣлено на 17, даетъ такой же остатокъ, какой получится отъ дѣленія 11.7 на 17. Дѣйствительно 572.75 = 42900; 11.7 = 77; оба эти числа при дѣленіи на 17 даютъ остатокъ 9.

Теорема 5. *Если произведеніе двухъ множителей дѣлится безъ остатка на какое-нибудь число, первое съ однимъ изъ этихъ множителей, то другой множитель долженъ дѣлиться на это число безъ остатка.* Пусть напр. a_1a_2 дѣлится безъ остатка на p, и пусть p первое съ a_1; докажемъ, что a_2 дѣлится безъ остатка на p. При этомъ могутъ быть два случая: 1) если $a_1<p$; 2) если $a_1>p$.

1-й случай. Пусть $a_1<p$. Раздѣлимъ p на a_1 и означимъ частное q, а остатокъ r_1; тогда $p=a_1q+r_1$; здѣсь a_1 и r_1 суть числа взаимно простыя; дѣйствительно, если бы они имѣли хотя одного общаго множителя (кромѣ единицы), то на этого множителя (слѣд. 1 теор. 1) раздѣлилось бы безъ остатка и p; слѣд. p и a_1 имѣли бы также общаго множителя, между тѣмъ какъ они, по положенію, числа первыя между собой. Далѣе, дѣлимъ a_1 на r_1 (такъ какъ $r_1<a_1$); пусть частное будетъ q_1, а остатокъ r_2, тогда изъ равенства $a_1= =q_1r_1+r_2$ найдемъ, что r_1 и r_2 числа взаимно простыя. Дѣля r_1 на r_2 и означая частное q_2 и остатокъ r_3, получимъ $r_1=q_2\,r_2+r_3$, откуда слѣдуетъ, что r_3 и r_2 числа взаимно простыя. Продолжая такимъ образомъ дѣлеть r_2 на r_3, r_3 на r_4..., будемъ получать остатки, изъ которыхъ каждые два, непосредственно одинъ за другимъ слѣдующіе, будутъ числа первыя между собой, и слѣд. ни одинъ изъ нихъ не будетъ=нулю; но такъ какъ остатки послѣдовательно уменьшаются, то мы дойдемъ наконецъ до какого-нибудь $r_n=1$; этотъ остатокъ получится отъ дѣленія остатка r_{n-2} на r_{n-1}; означивъ частное отъ этого дѣленія черезъ q_{n-1}, будемъ имѣть $r_{n-2}=q_{n-1}\,r_{n-1}+1$. Помноживъ всѣ предыдущія равенства на a_2, получимъ:

$$a_2\,p=a_1\,a_2\,q+a_2\,r_1$$
$$a_1\,a_2=a_2\,r_1\,q_1+a_2\,r_2$$
$$a_2\,r_1=a_2\,r_2\,q_2+a_2\,r_3$$
$$\cdots\quad\cdots\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots\cdots$$
$$a_2r_{n-2}=a_2r_{n-1}q_{n-1}+a_2.$$

Такъ какъ a_2p и a_1a_2 дѣлятся на p, то изъ перваго равенства слѣдуетъ, что a_2r_1 дѣлится на p; изъ второго равенства найдемъ, что a_2r_2 дѣлится на p и т. д.; наконецъ изъ послѣдняго, что a_2 дѣлится на p, что и требовалось доказать.

Такъ напр. $70=5.14$ дѣлится безъ остатка на 7; а 6 и 7 числа взаимно простыя; поэтому 14 должно дѣлиться на 7.

2-й случай. Положимъ, что $a_1>p$. Раздѣлимъ a_1 на p и означимъ частное q, а ост. r; тогда $a_1=pq+r$, гдѣ r и p взаимно простыя. Умноживъ это равенство на a_2, получимъ $a_1a_2=a_2pq+a_2r$.

Такъ какъ a_1a_2 и a_2pq дѣлятся на p, то и a_2r должно дѣлиться на p; но p и r числа первыя между собою и притомъ $r<p$, слѣд. (случай 1-й) a_2 должно дѣлиться на p.

Изъ этой теоремы вытекаетъ нѣсколько слѣдствій, а именно:

1) *Если произведеtе* a_1a_2 *двухъ чиселъ дѣлится безъ остатка на первоначальное число* p, *и* a_1 *не дѣлится на* p, *то* a_2 *должно дѣлиться на* p. Дѣйствительно, a_1 и p суть числа взаимно простыя.

2) *Если числа* a_1 *и* a_2 *не дѣлятся безъ остатка на первонач. число* p, *то и произведеніе ихъ не раздѣлится на* p. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что a_1a_2 дѣлится на p, нашли бы (слѣд. 1), что или a_1, или a_2 должно дѣлиться на p, а это противно положенію.

3) *Если произведеніе двухъ чиселъ дѣлится на первонач. число* p, *то одинъ изъ производителей долженъ дѣлиться на* p.

4) Такъ какъ $a^m=aaa...$, то (слѣд. 3) *если степень числа дѣлится на первонач. число* p, *то и самое число раздѣлится.*

5) *Степень всякаго первоначальнаго числа можетъ имѣть только одного первонач. дѣлителя, именно это самое число* (напр. 3^7 не можетъ дѣлиться ни на какія первон. числа, кромѣ 3). Дѣйствительно, если a^m, гдѣ a есть число первон., дѣлится на первонач. число p, то (слѣд. 4) и a должно дѣлиться на p; но a можетъ дѣлиться только на само себя.

6) *Всякое число допускаетъ только одно разложеніе на первоначальныхъ дѣлителей* (напр. $180=2.2.3.3.5$ и больше никакихъ первонач. дѣлителей имѣть не можетъ). Положимъ, что число N имѣетъ два разложенія, именно

$N=a^m\ b^n\ c^p$ и $N=x^q\ y^r\ z^s$; слѣд. $a^m\ b^n\ c^p=x^q\ y^r\ z^s$. (1).

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на a; первая часть дѣлится на a безъ остатка, такъ какъ a^m дѣлится на a; слѣд. и вторая часть также должна дѣлиться на a, а потому (слѣд. 3) какой-нибудь производитель, напр. x^q, долженъ дѣлиться на a, и на основаніи слѣд. 5 заключаемъ, что $x=a$; точно также докажемъ, что $y=b$, $z=c$. Такимъ образомъ получимъ $a^m\ b^n\ c^p=a^q\ b^r\ c^s$. Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на a^m; первая часть равенства раздѣлится безъ остатка, слѣд. и вторая часть должна дѣлиться безъ остатка на a^m; но какъ a, b, c... числа первонач., то (слѣд. 2) ни b^r, ни c^s не могутъ дѣлиться на a, а слѣд. будутъ первыми съ a и съ a^m; поэтому a^q должно дѣлиться на a^m. Если бы раздѣлили обѣ части того же равенства на a^q, то нашли бы, что a^m дѣлится на a^q. Такимъ образомъ видимъ, что a^m дѣлится нацѣло на a^q и обратно a^q дѣлится на a^m; а это можетъ быть только тогда, когда $m=q$. Также докажемъ, что $n=r$, $p=s$

Теорема 6. *Если число* a *дѣлится порознь на числа* p *и* p_1, *первыя между собою, то оно будетъ дѣлиться и на ихъ произведеніе* pp_1. Положивъ $a : p = q$; получимъ $a = pq$; но a дѣлится безъ остатка и на p_1, слѣд. и pq дѣлится на p_1; но какъ p и p_1 числа взаимно простыя, то по теор. 5 заключаемъ, что q дѣлится на p_1 безъ остатка; означивъ частное этого дѣленія черезъ q_1, будемъ имѣть $q=p_1q_1$; поэтому $a=pq=pp_1q_1$; такъ какъ pp_1 входитъ множителемъ въ a, то слѣд. a раздѣлится на pp_1 безъ остатка. Напр. 5460 дѣлится на 20 и 39; раздѣлится также и на 20 . 39= =780; дѣйствительно 5460 : 780=7. Теорема эта справедлива только тогда, когда *дѣлители числа взаимно простыя*; такъ 120 дѣлится на 5 и 12, поэтому раздѣлится и на 60; но 120 дѣлится также на 40 и 60 однакоже не дѣлится на 40.60 = 2400. На этой теоремѣ основывается нахожденіе общаго наибольшего дѣлителя чиселъ посредствомъ разложенія на первоначальныхъ дѣлителей.

Теорема 7. *Если какое-нибудь число* a *не дѣлится безъ остатка на первоначальное число* p, *то* a^{p-1} *при дѣленіи на* p *даетъ въ остаткѣ единицу*, или слѣд. $a^{p-1}-1$ *дѣлится на* p *безъ остатка*. Для доказательства возьмемъ рядъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $p-1$:

$$1,\ 2,\ 3\ldots,\ m,\ldots,\ n,\ldots,\ (p-1).$$

Умножимъ каждое изъ этихъ чиселъ на a, и произведенія: a, $2a$, $3a$,.. ma,.. na,.. $(p-1)\,a$ раздѣлимъ на p; положимъ, что остатки будутъ r_1, $r_2\ldots$ $r_m\ldots$ $r_n\ldots$ r_{p-1}.

Число всѣхъ остатковъ $= p-1$, и ни одинъ изъ нихъ не $= 0$ на основаніи теор. 5 слѣд. 2. Докажемъ, что всѣ остатки различны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что существуютъ два равныхъ остатка, напр. $r_m=r_n$, то по теор. 3-й $ma - na = (m-n)a$ должно дѣлиться на p безъ остатка; а это невозможно, потому что ни a, ни $m-n$ не дѣлятся на p. Если же остатки r_1, $r_2\ldots$, $r_m\ldots$ r_{p-1} всѣ различны и всѣ меньше p, то слѣд. они составляютъ рядъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $p-1$ включительно. Но (теор. 4) произведеніе чиселъ равноостаточно съ произведеніемъ остатковъ, слѣд. $a\,.\,2a\,.\,3a\ldots.\ ma\ldots.na\ldots.\ (p-1)\ a$, или $1\,.\,2\ldots.\ (p-1)\ a^{p-1}$, и $r_1\ r_2\ldots.\ r_m\ldots.\ r_n\ldots.\ r_{p-1}$, или $1\,.\,2\,.\,3\ldots\ (p-1)$, даютъ при дѣленіи на p равные остатки, а потому (теор. 3) разность

$$1.\ 2.\ 3..\ (p-1)\ a^{p-1}-1.2.3\ldots\ (p-1)=$$
$$=1.\ 2.\ 3\ldots.\ (p-1)\ [a^{p-1}-1]$$ дѣлится безъ остатка на p; но какъ $1.\ 2.\ 3\ldots\ (p-1)$ не дѣлится на p, то (теор. 5, слѣд. 1) $a^{p-1}-1$ должно дѣлиться безъ остатка на p, что и требовалось доказать.

Возьмемъ напр. числа 9 и 5; 9 на 5 не дѣлится, а $9^4-1=6560$ дѣлится. Эта теорема наз. *теоремой Фермата*.

Слѣдствіе. Если a^{p-1} при дѣленіи на p даетъ въ остаткѣ единицу, то $a^{m(p-1)}$ даетъ при дѣленіи на p въ остаткѣ также единицу; дѣйствительно, $a^{m(p-1)}=a^{p-1}.\ a^{p-1}.\ a^{p-1}\ldots.$; такъ какъ каждый производитель даетъ въ остаткѣ 1, то по теоремѣ 4-й остатокъ произведенія $a^{m(p-1)}$ будетъ такой, какой получится отъ произведенія остатковъ, то есть отъ 1, взятой множителемъ m разъ; а 1 въ конечной степени=1. Такимъ образомъ $a^{m(p-1)}-1$ дѣлится на p. Такъ напр. $8^{3(3-1)}-1=8^6-1=262143$ дѣлится на 3.

149. Признакъ дѣлимости на всякое первоначальное число. Возьмемъ число N; чтобы узнать, дѣлится ли N на первоначальное *число* p, раздѣлимъ N (написавъ его по десятеричной системѣ) на грани отъ правой руки къ лѣвой по $p-1$ цыфръ въ каждой грани; пусть a_0, a_1 a_2... a_m будутъ числа первой, второй, третьей и т. д. граней, такъ что

$$N=a_0+a_1 . 10^{p-1}+a_2 . 10^{2(p-1)}+...+a_m . 10^{m(p-1)};$$

или, придавши и вычтя $a_1+a_2+...+a_m$, получимъ:

$$N=a_1 (10^{p-1}-1)+a_2 (10^{2(p-1)}-1)+...+a_m(10^{m(p-1)}-1)+$$
$$+a_0+a_1+a_2+...+a_m.$$

Каждое изъ слагаемыхъ, написанныхъ сверху, по теоремѣ Фермата дѣлится безъ остатка на p; слѣд. если $a_0+a_1+a_2+...a_m$ раздѣлится на p, то и число N раздѣлится. Итакъ, признакъ дѣлимости на всякое первонач. число p состоитъ въ томъ, что должно *раздѣлить число отъ правой руки на грани по* $p-1$ *цыфръ въ каждой и если сумма этихъ граней раздѣлится* на p, *то и все число раздѣлится*.

150. На основаніи слѣдующихъ двухъ положеній можно вывести признакъ дѣлимости на всѣ числа, *не кратныя* 2 и 5; при этомъ для нѣкоторыхъ дѣлителей, напр. 11, 7, 19, получаются признаки, довольно удобные.

1) Если число a дѣлится безъ остатка на b, то и $a\pm nb$ (гдѣ n цѣлое число) будетъ дѣлиться на b; если же a не дѣлится безъ остатка на b, то и $a\pm nb$ не раздѣлится на b. Поэтому, *дѣлимость какого-нибудь числа на другое число не измѣнится если мы къ дѣлимому прибавимъ или вычтемъ изъ него число, кратное дѣлителю*; напр. число 273 дѣлится безъ остатка на 3; потому и 273± 5 . 3 (т. е. 288 и 258) раздѣлится на 3. Число 572 не дѣлится на 7; поэтому и 572±4 . 7 не раздѣлится на 7.

2) *Дѣлимость какого-нибудь числа на другое число, не содержащее первоначальныхъ производителей 2 и 5*, не *измѣнится, если мы къ дѣлимому припишемъ справа или отбросимъ отъ него нѣсколько нулей*; напр. 459900 дѣлится безъ остатка на 63; поэтому и 4599, а также 4599000 будутъ дѣлиться на 63; число 1309 не дѣлится на 87; поэтому *и* 13090 не раздѣлится на 87. Дѣйствительно, число 459900=4599.100, и если это произведеніе дѣлится на число 63, первое съ однимъ изъ множителей, именно съ 100, то другой множитель, т. е. 4599, долженъ дѣлиться на 63. Если число 1309 не дѣлится на 87, то, умножая его на 10, 100..., числа первыя съ 87, мы вводимъ такихъ производителей, которыхъ 87 не содержитъ; поэтому 13090, 103900... не раздѣлятся на 87.

151. Признакъ дѣлимости на 11. Пусть надо узнать, дѣлится ли на 11 число 98692. Если бы это число оканчивалось нулями, то на основаніи второго изъ предыдущихъ положеній эти нули можно было бы отбросить; тогда мы получили бы для изслѣдованія число, гораздо меньшее и слѣд. болѣе удобное для рѣшенія нашего вопроса; поэтому данное число, *не измѣняя свойствъ его по отношенію къ*

дѣлимости на *11*, замѣнимъ такимъ числомъ, которое бы оканчивалось нулемъ. Такъ какъ данное число оканчивается цыфрой 2, то чтобъ обратить эту цыфру въ 0, не измѣняя притомъ дѣлимости числа, должно, на основаніи 1-го положенія, вычесть изъ числа 2.11==22; получимъ число 98670, въ которомъ нуль можно отбросить. Число 9867 опять замѣнимъ числомъ, оканчивающимся на 0, вычтя изъ него 7.11=77; получимъ число 9790, въ которомъ нуль опять можемъ отбросить. Изъ числа 979 вычтемъ 9.11=99; получимъ 880. или (отбросивъ 0) 88—число, о дѣлимости котораго на 11 уже легко судить. Оно дѣлится на 11; поэтому и 98692 дѣлится.

Разсматривая дѣйствія, произведенныя нами для обращенія числа 98692 въ 88, мы замѣчаемъ, что, вычитая 22, мы вычли цыфру единицъ 2 изъ цыфры десятковъ 9; получили 9867. Вычитая 77, мы цыфру единицъ (7) полученнаго числа 9867 вычли изъ десятковъ (6), для чего пришлось занять единицу у слѣдующаго разряда; при чемъ получили число 979. Вычитая 99, мы цыфру единицъ числа 979 вычли изъ слѣдующаго разряда; получили число 88.

Возьмемъ еще примѣръ. Чтобъ узнать, дѣлится ли на 11 число 951027, вычитаемъ 7 изъ слѣдующаго разряда, получимъ 95095; затѣмъ вычитаемъ 5 изъ слѣдующей цыфры полученнаго числа—получимъ 9504; вычитаемъ 4 изъ десятковъ полученнаго числа—находимъ 946; вычитаемъ 6 изъ 94—получаемъ 88; слѣд. данное число дѣлится на 11.

152. Признакъ дѣлимости на 7. Возьмемъ число 40341; чтобы, не измѣняя свойствъ этого числа по отношенію къ дѣлимости его на 7, замѣнить его числомъ, оканчивающимся на 0, вычтемъ изъ него 3.7=21; получимъ 40320, или (отбросивъ 0) 4032. Чтобы въ этомъ числѣ цыфру 2 замѣнить нулемъ, вычтемъ изъ него не 21, а 2.21=42; получимъ 3990. Чтобы въ числѣ 399 цыфру единицъ замѣнить нулемъ, вычтемъ изъ него 9.21=189; получимъ число 210; а отбросивши 0, получимъ число 21, которое дѣлится на 7; поэтому и данное число раздѣлится на 7.

Когда мы отнимали 21, то намъ изъ десятковъ даннаго числа пришлось вычесть 2, т. е. удвоенную цыфру единицъ; получили число 4032; отнимая 42, мы удвоенную цыфру единицъ полученнаго числа 4032 (т. е. 4) вычитаемъ изъ слѣдующаго разряда этого числа, получаемъ 399; вычитая отсюда 189, мы удвоенную цыфру единицъ полученнаго числа 399 (т. е. 18) вычитаемъ изъ слѣдующихъ разрядовъ; находимъ 21.

153. Признакъ дѣлимости на 19. Чтобъ узнать, дѣлится ли на 19 число 78622, замѣнимъ его числомъ, оканчивающимся на нуль. Если бы въ данномъ числѣ на мѣстѣ единицъ стояла цыфра 1, то для этого въ числу нужно было бы придать 19; но оно оканчивается на 2; поэтому для замѣны цыфры 2 нулемъ надо придать 2.19=38; получимъ 78660, или (откинувъ нуль) 7866. Чтобы въ этомъ числѣ замѣнить цыфру единицъ 6 нулемъ, придадимъ къ нему 6.19=114; получимъ 7980; отбросивъ въ этомъ числѣ нуль, придадимъ къ 798 число 8.19=152 и въ суммѣ отбросимъ нуль; тогда получимъ 95; число это дѣлится на 19; поэтому и данное число 78622 дѣлится на 19.

Такъ какъ для замѣны нулемъ каждой единицы мы должны были

прибавлять по 19, что вмѣстѣ съ единицей составляетъ ровно 2 десятка, то слѣд. для уничтоженія каждой единицы намъ приходилось прикладывать къ десяткамъ 2; другими словами — мы первую справа цыфру числа удвояваля и придавали въ десяткамъ. Такимъ образомъ, чтобы узнать, дѣлится ли на 19 напр. число 628976, нужно произвести слѣдующія дѣйствія: удвоить цыфру единицъ 6 и придать 12 къ числу 62897; получимъ 62909; въ этомъ числѣ удвоить цыфру 9 и придать 18 къ числу 6290 — получимъ 6308; затѣмъ 2.8 придать къ 630—найдемъ 646; потомъ 2.6 придать къ 64—получимъ 76; 76 дѣлится на 19, поэтому и данное число раздѣлится на 19.

154. Признаки дѣлимости чиселъ зависятъ отъ системы, по которой написаны числа; мы разсмотрѣли признаки дѣлимости для чиселъ десятеричной системы счисленія; для чиселъ другихъ системъ признаки дѣлимости будутъ иные. Напр. числа, написанныя по двѣнадцатеричной системѣ, имѣютъ слѣдующіе признаки дѣлимости: число дѣлится на 4, если оно оканчивается цыфрой, дѣлящейся на 4 (такъ какъ единицы второго разряда—дюжины—дѣлятся на 4). На 9 дѣлятся тѣ числа, у которыхъ первыя двѣ цыфры съ правой стороны (т. е. дюжины и единицы) дѣлятся на 9, потому что единицы третьяго разряда (гроссы) дѣлятся на 9.

На 11 дѣлятся тѣ числа, у которыхъ сумма цыфръ дѣлится на 11 (такъ какъ дюжины, гроссы..., вообще единицы каждаго разряда при дѣленіи на 11 даютъ въ остаткѣ 1).

Вообще, если основаніе системы $= n$, то числа этой системы дѣлятся на $n-1$ тогда, когда сумма цыфръ ихъ дѣлится на $n-1$; это потому, что единица каждаго разряда такихъ чиселъ при дѣленіи на $n-1$ даетъ въ остаткѣ 1; такъ $n=1.(n-1)+1$;

$n^2=(n+1).(n-1)+1$; $n^3=(n^2+n+1).(n-1)+1$ и т. под.

155. Повѣрка ариѳметическихъ дѣйствій числомъ 9. Эта повѣрка основывается на томъ, *что всякое число при дѣленіи на 9 даетъ такой же остатокъ, какой получается отъ дѣленія суммы цыфръ его на 9.* Дѣйствительно, возьмемъ напр. число 3765 и разложимъ его на разряды: 3765=3000+700+60+5.

Но 3000=333.9+3; 700=77.9+7; 60=6.9+6; слѣд.

3765=9.(333+77+6)+(3+7+6+5), а потому

3765 : 9=333+77+6+(3+7+6+5) : 9; слѣд. остатокъ отъ дѣленія 3765 на 9 будетъ тотъ же, какъ отъ дѣленія 3+7+6+5 на 9.

156. Повѣрка сложенія. Положимъ, что имѣемъ сумму: 3567+438+5026+4310=13721. Чтобы узнать, вѣрно ли сдѣлано сложеніе, находимъ остатки отъ дѣленія на 9 каждаго слагаемаго. Говоримъ: 3 да 5=8, 8+6=14; исключивши 9, останется 5; 5+7==12; исключивши 9, будетъ 3; 3+4=7; 7+3=10; исключивши 9, будетъ 1; 1+8=9; 9−9=0; 5+0+2+6=13; 13—9=4; 4+4=8; 8+3=11; 11—9=2; 2+1=3; итакъ, остатокъ отъ слагаемыхъ=3. Найдя также остатокъ отъ суммы 13721, увидимъ, что онъ =5; слѣд. сложеніе сдѣлано невѣрно; дѣйствительно, передѣлавши его, найдемъ въ суммѣ 13341.

157. Повѣрка вычитанія. Если напр. нашли 3672 — 2837 = 845, то для повѣрки беремъ сумму цыфръ вычитаемаго: 2 + 8 = 10;

10—9=1; 1+8=4; 4+7=11; исключая 9, получимъ 2; остатокъ 2 прибавляемъ къ суммѣ цыфръ разности; 2+8=10; 10—9=1; 1+4+5=10; 10—9=1. Теперь найдемъ остатокъ уменьшаемаго: 3+6+7+2=18; исключивъ два раза 9, получимъ остатокъ 0; слѣд. вычитаніе сдѣлано невѣрно, и, передѣлавъ его, найдемъ разность 835.

158. Повѣрка умноженія. Мы уже видѣли, что остатокъ произведенія, при дѣленіи на какое-нибудь число, долженъ равняться остатку отъ произведенія остатковъ производителей; поэтому, чтобы повѣрить умноженіе числомъ 9, должно отдѣльно сложить цыфры множимаго и множителя, изъ каждой суммы исключить 9; полученные остатки перемножить и опять исключить 9; потомъ исключить 9 изъ суммы цыфръ произведенія; въ результатѣ долженъ получиться тотъ же остатокъ. Напр. пусть дано повѣрить 5467.368=2021856; сложивъ цыфры множимаго и исключивъ 9, получимъ 4; сдѣлавъ то же съ множителемъ, найдемъ 8; 4.8=32; исключивъ 9, получимъ 5; остатокъ же отъ произведенія=6; слѣд. умноженіе сдѣлано невѣрно; передѣлавши, получимъ произведеніе 2011856.

159. Повѣрка дѣленія. Если дѣленіе совершилось безъ остатка, то для повѣрки нужно поступать такъ же, какъ при повѣркѣ умноженія, принимая дѣлимое за произведеніе дѣлителя на частное. Если же при дѣленіи будетъ остатокъ, то его должно сперва вычесть изъ дѣлимаго и потомъ поступать по предыдущему, принимая уже уменьшенное дѣлимое за произведеніе дѣлителя на частное. Если напр. найдено, что 563874, будучи раздѣлено на 475, даетъ въ частномъ 1308 и въ остаткѣ 74, то должно быть 563874—74=563800=475. 1308. Для повѣрки находимъ остатокъ частнаго=3; остатокъ дѣлителя=7; 3.7=21, остатокъ=8; остатокъ 563800=4; слѣд. дѣленіе сдѣлано невѣрно; передѣлавъ его, получимъ частное 1187, а остатокъ 49.

160. Повѣрка числомъ 9 не можетъ считаться несомнѣннымъ признакомъ безошибочности повѣряемаго результата. Напр. если сказать, что 368+563+67+859=37056, то и не передѣлывая дѣйствія, можно видѣть, что оно сдѣлано ошибочно, ибо сумма, очевидно, должна быть меньше 4000; между тѣмъ, повѣрявши числомъ 9, находимъ остатокъ отъ слагаемыхъ=3 и отъ суммы также=3. Это равенство остатковъ произошло оттого, что сумма цыфръ истинной суммы 1857 и числа 37056 одинакова.

Такимъ образомъ, если при повѣркѣ числомъ 9 окончательные остатки не будетъ равны, то можно сказать, что дѣйствіе сдѣлано ошибочно (и то предполагая, что при самой повѣркѣ мы не сдѣлали ошибки); если же остатки равны, то нельзя сказать, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно. Иначе говоря — равенство остатковъ есть условіе *необходимое* для того, чтобы дѣйствіе было вѣрно, но не *достаточное* для этого.

ГЛАВА V.

ДРОБИ.

161. Происхожденіе дробей отъ измѣренія. Мы уже говорили, что для опредѣленія какой-нибудь величины мы должны ее *измѣрить*, т. е. сравнять ее съ единицею. Такъ напр., желая узнать длину стола, мы *измѣряемъ* ее аршиномъ. Положимъ, что арш. уложился по длинѣ стола ровно два раза; тогда получится цѣлое число; если бы тотъ же самый столъ мы захотѣли измѣрить саженью, то увидѣли бы, что сажень не содержится въ немъ ни одного раза; въ такомъ случаѣ мы дѣлимъ сажень на нѣсколько равныхъ частей, напр. на 6, и смотримъ, сколько разъ одна такая часть содержится въ длинѣ стола; если шестая часть содержится 5 разъ, то длина стола=пяти шестымъ долямъ сажени, или просто пяти шестымъ сажени; это число пять шестыхъ наз. *дробью*. Итакъ, *дробь есть число, показывающее, сколько разъ и какая именно доля единицы уложилась въ измѣряемой величинѣ*. Поэтому, чтобы составить себѣ полное понятіе о дроби, нужно знать 1) *какая была взята доля единицы*, или *на сколько равныхъ частей была раздѣлена единица*; 2) *сколько такихъ долей было взято*, или *сколько разъ такая доля повторилась въ измѣряемой величинѣ*. На основаніи этого дробь выражается двумя числами, которыя при письменномъ обозначеніи дроби ставятся одно подъ другимъ и отдѣляются другъ отъ друга чертою; одно изъ нихъ показываетъ, какія части взяты, или на сколько равныхъ частей была раздѣлена единица — оно наз. *знаменателемъ* и ставится *подъ чертою*; а другое, показывающее, сколько такихъ частей взято, наз. *числителемъ* и ставится *надъ чертою*. Такъ напр. дробь пять шестыхъ изобразится $^5/_6$; здѣсь 6 есть знаменатель и показываетъ, что единица была раздѣлена на 6 равныхъ частей; а 5—числитель, показывающій, что шестая часть повторилась 5 разъ. Точно также $^2/_3$ читается двѣ третьихъ доли или двѣ трети и показываетъ, что единица была раздѣлена на 3 равныя части и такихъ частей взято 2. Числитель и знаменатель вмѣстѣ наз. *членами* дроби.

162. Происхожденіе дробей отъ дѣленія. Положимъ, что нужно 23 одинакихъ хлѣба раздѣлить поровну между 5-ю рабочими. Чтобъ узнать, сколько получитъ каждый, должно 23 раздѣлить на 5; въ частномъ получимъ 4, а въ остаткѣ 3; итакъ каждый долженъ получить 4 хлѣба и еще пятую часть трехъ хлѣбовъ. Для этого раздѣлимъ первый хлѣбъ на 5 равныхъ частей и дадимъ одну часть какому-нибудь работнику; потомъ раздѣлимъ второй хлѣбъ на 5 равныхъ частей и опять дадимъ ему одну часть; потомъ сдѣ-

наемъ то же самое и съ третьимъ хлѣбомъ; такимъ образомъ работникъ получитъ по пятой части отъ каждаго изъ трехъ хлѣбовъ, слѣд. пятую часть отъ всѣхъ трехъ хлѣбовъ. Но, вмѣсто того, чтобы дѣлить каждый хлѣбъ на 5 равныхъ частей и давать работнику одну часть отъ перваго хлѣба, одну часть отъ второго и одну часть отъ третьяго, можно, такъ какъ хлѣбы одинакіе, раздѣлить одинъ какой-нибудь хлѣбъ на 5 равныхъ частей и выдать работнику 3 части. Точно такъ же можно раздать хлѣбъ и каждому изъ остальныхъ работниковъ. Поэтому вмѣсто того, чтобы дѣлить 3 хлѣба на 5 равныхъ частей, можно одинъ хлѣбъ раздѣлить на 5 равныхъ частей и такихъ частей взять 3. Слѣд. $^3/_5$ можетъ произойти двоякимъ образомъ: или такъ, что единица раздѣлена на 5 равныхъ частей и такихъ частей взято 3, или же такъ, что 3 единицы раздѣлены на 5 равныхъ частей. Итакъ $3 : 5 = {}^3/_5$; т. е. *дробь есть частное, происходящее отъ дѣленія числителя на знаменателя.* Поэтому полное частное отъ дѣленія 23 на 5 будетъ $4^3/_5$. Дѣленіе 23 на 5 обозначается или $23 : 5 = 4^3/_5$, или $^{23}/_5 = 4^3/_5$.

Положимъ еще, что нужно веревку, въ 5 аршинъ длиною, раздѣлить на 8 равныхъ частей. Какъ велика будетъ каждая часть? 5 арш.=5.16=80 вершкамъ; раздѣливъ 80 верш. на 8, получимъ 10 верш.; слѣд. осьмая часть пяти аршинъ=10 верш. Если же одинъ арш., или 16 верш., раздѣлимъ на 8 равныхъ частей и такихъ частей возьмемъ 5, то получимъ также 10 верш.; слѣд. осьмая часть пяти арш. все равно, что пять восьмыхъ одного арш.; или 5 раздѣлить на 8 все равно, что единицу раздѣлить на 8 равныхъ частей и такихъ частей взять 5. Точно также $4 : 7 = {}^4/_7$; $48 : 5 = 9^3/_5$ и т. под. Вообще, *если дѣленіе будетъ съ остаткомъ, то этотъ остатокъ должно приписать къ частному въ видѣ дроби знаменателемъ которой будетъ дѣлитель.*

163. Раздѣленіе дробей по отношенію величины ихъ къ единицѣ. Положимъ, что пятая доля единицы повторилась въ какой-нибудь величинѣ 17 разъ; тогда получимъ число $^{17}/_5$; но такъ какъ единица содержитъ только $^5/_5$ долей, то $^{17}/_5$ будетъ больше единицы; также, если бы пятая доля единицы повторилась въ величинѣ 5 разъ, то получилась бы дробь $^5/_5$, равная единицѣ. Итакъ, *дробь можетъ быть меньше единицы, равна ей и больше ея. Если числитель меньше знаменателя, то дробь меньше единицы;* напр. $^3/_5$ меньше единицы, потому что въ единицѣ $^5/_5$, а здѣсь только $^3/_5$; *если числитель больше знаменателя, то дробь больше единицы;* напр. $^7/_5$ больше единицы, потому что въ ней кромѣ $^5/_5$, или цѣлой единицы содержится еще $^2/_5$. *Та дробь, у которой числитель равенъ знаменателю,* напр. $^5/_5$, $^7/_7$, *равна единицѣ.* Вмѣсто словъ *больше* и *меньше* употребляются знаки $>$ и $<$; такъ $^3/_5 < 1$ значитъ $^3/_5$ меньше 1; $^8/_7 > 1$ значитъ $^8/_7$ болѣе 1. Дробь,

меньшая единицы, наз. *правильной*; а та, которая больше единицы или равна ей, наз. *неправильной*.

164. Обращеніе цѣлаго числа съ дробью въ неправильную дробь. Возьмемъ число $5^3/_8$; такъ какъ единица содержитъ 8 восьмыхъ долей, то въ 5 единицахъ будетъ восьмыхъ долей въ 5 разъ больше, т. е. $^{40}/_8$, а $^{40}/_8$ да еще $^3/_8$ составитъ $^{43}/_8$; слѣд. $5^3/_8=^{43}/_8$. Итакъ, *чтобы цѣлое число съ дробью обратить въ дробь, должно цѣлое число умножить на знаменателя, къ произведенію придать числителя и подъ суммою подписать того же знаменателя.* Напр. $7^4/_{11}=^{81}/_{11}$; $4^6/_8=^{38}/_8$.

165. Исключеніе изъ неправильной дроби цѣлаго числа. *Исключить изъ неправильной дроби цѣлое число значитъ узнать сколько въ ней содержится единицъ.* Возьмемъ напр. дробь $^{17}/_5$; такъ какъ $^5/_5$ составляютъ одну единицу, то въ $^{17}/_5$ будетъ столько единицъ, во сколько разъ 17 больше 5; т. е. должно 17 раздѣлить на 5, и найдемъ, что $^{17}/_5=3^2/_5$. Поэтому, *чтобы исключить изъ неправильной дроби цѣлое число, должно числителя раздѣлить на знаменателя; частное покажетъ цѣлыя единицы, а остатокъ—сколько останется долей, не составляющихъ цѣлой единицы.* Напр. $^{68}/_7=9^5/_7$.

166. Увеличеніе и уменьшеніе дробей. Возьмемъ дробь $^4/_{12}$ и увеличимъ ея числит. въ 2 раза, получимъ $^8/_{12}$; что сдѣлалось съ дробью? Въ прежней дроби было двѣнадцатыхъ долей 4, а въ новой этихъ долей 8, т. е. вдвое больше; а потону и сама дробь вдвое больше прежней. Такимъ образомъ. если числителя увеличимъ, то и дробь увеличится, потому что число частей сдѣлается больше, а величина ихъ останется та же. Уменьшимъ теперь въ 2 раза знамен. дроби $^4/_{12}$ — получимъ $^4/_6$; дробь опять увеличилась вдвое, потому что прежде было 4 *двѣнадцатыхъ* доли, а теперь столько же *шестыхъ* долей; а шестыя дели вдвое крупнѣе двѣнадцатыхъ, потому что изъ одной шестой доли можетъ выйти двѣ двѣнадцатыхъ, какъ это видно ва чертежѣ. Слѣд. если знамен. уменьшимъ, то дробь опять увеличится, потому что, хотя частей будетъ столько же, сколько и прежде, но зато онѣ сдѣлаются крупнѣе.

$^1/_{12}$

$^1/_6$

Уменьшимъ теперь въ 2 раза числит. дроби $^4/_{12}$—получимъ $^2/_{12}$; дробь также уменьшилась въ 2 раза, потому что число частей стало вдвое меньше. Увеличивши знамен. дроби $^4/_{12}$ въ 2 раза, получимъ $^4/_{24}$; эта дробь также вдвое менѣе $^4/_{12}$, потому что она содержитъ столько двадцать-четвертыхъ долей, сколько первая содержитъ двѣнадпатыхъ долей; а двадцать-четвертыя доли вдвое мельче двѣнадцатыхъ, потому что изъ одной двѣнадцатой можно

сдѣлать 2 двадцать—четвертыхъ. Слѣд. если уменьшимъ числит., то уменьшится и дробь, потому что число частей уменьшится; если увеличимъ знаменат., то дробь опять уменьшится, потому что части сдѣлаются мельче.

Итакъ, *чтобъ увеличить дробь въ нѣсколько разъ, надо во столько же разъ увеличить ея числителя или уменьшить знаменателя; чтобъ уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, должно во столько же разъ уменьшить ея числителя или увеличить знаменателя.* Напр., чтобъ увеличить $^3/_{35}$ въ 5 разъ, можно умножить числит. на 5, такъ что выйдетъ $^{15}/_{35}$; или раздѣлимъ знамен. на 5, получимъ $^3/_7$; и $^{15}/_{35}$, и $^3/_7$ больше $^3/_{35}$ въ пять разъ. Чтобъ уменьшить дробь $^6/_{11}$ въ два раза, должно или раздѣлить числит. 6 на 2, получимъ $^3/_{11}$; или умножить знамен. 11 на 2, получимъ $^6/_{22}$.

Примѣры. 1) Что сдѣлается съ дробью, если числит. ея умножить на 3, а знамен. раздѣлить на 6?

Отъ умноженія числит. на 3 дробь увеличится въ 3 раза: если же еще раздѣлить знамен. на 6, то тройная дробь увеличится въ 6 разъ; слѣд. данная дробь увеличится въ 18 разъ.

2) Что сдѣлается съ дробью, если числит. ея раздѣлимъ на 8, а знамен. умножимъ на 5?

Отъ дѣленія числит. на 8 дробь уменьшится въ 8 разъ; если же еще знамен. умножимъ на 5, то новая дробь уменьшится въ 5 разъ; слѣд. данная дробь уменьшится въ 40 разъ.

3) Что сдѣлается съ дробью, если числит. умножить на 8, а знамен. на 4?

Отъ умноженія числит. на 8 дробь увеличится въ 8 разъ, а отъ умноженія знамен. на 4 восьмерная дробь уменьшится въ 4 раза; слѣд. данная дробь увеличится въ 2 раза.

Точно также найдемъ, что, умноживъ числит. на 6, а знамен. на 18, уменьшимъ дробь въ 3 раза; отъ раздѣленія числит. на 4, а знамен. на 6, дробь увеличится въ полтора раза, и т. п.

167. *Если числит. и знамен. умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, то дробь измѣнитъ только свой видъ, а величина ея останется та же.* Дѣйствительно, во сколько разъ дробь увеличится отъ увеличенія числит., во столько же разъ уменьшится отъ увеличенія знамен.; или, во сколько разъ уменьшится отъ уменьшенія числит., во столько же разъ увеличится отъ уменьшенія знамен. Возьмемъ напр. дробь $^3/_8$ и умножимъ числит. и знамен. на 2, получимъ $^6/_{16}$. Когда мы умножили числит. на 2, то дробь увеличилась въ 2 раза; а умноживъ знамен. на 2, мы ее уменьшили въ 2 раза, слѣд. величина дроби не измѣнилась, и $^6/_{16}=$ $=^3/_8$. Если въ дроби $^8/_{12}$ раздѣлимъ числит. и знамен. на 4, то получимъ $^2/_3$; новая дробь равна прежней, потому что, раздѣливши числит. 8 на 4, мы уменьшили дробь въ 4 раза; а раздѣливши знам. на 4, мы ее увеличили въ 4 раза.

Поэтому одна и та же дробь можетъ имѣть безчисленное множество видовъ; напр. $^{3}/_{7}$=$^{6}/_{14}$=$^{9}/_{21}$=$^{18}/_{56}$=....

168. Разсмотримъ теперь, что сдѣлается съ дробью, если мы къ числит. и знамен. *придадимъ* или *вычтемъ* въ нихъ *поровну*. Возьмемъ правильную дробь $^{4}/_{7}$ и придадимъ къ числит. и знамен. ея по 2, получимъ $^{6}/_{9}$. Сравнивая дробь $^{4}/_{7}$ и $^{6}/_{7}$ съ единицею, находимъ, что въ первой недостаетъ до единицы $^{3}/_{7}$, а во второй недостаетъ $^{3}/_{9}$ т. е. недостаетъ меньше, чѣмъ въ первой; слѣд. вторая дробь больше, и потому дробь $^{4}/_{7}$ отъ приложенія къ числит. и знамен. ея числа 2 увеличилась. Наоборотъ, если придадимъ напр. по 3 къ членамъ неправ. дроби $^{7}/_{4}$ то получимъ $^{10}/_{7}$—дробь, меньшую $^{7}/_{4}$, потому что $^{10}/_{7}$ превышаетъ единицу только на 3 седьмыхъ доли, тогда какъ $^{7}/_{4}$ больше единицы на 3 четвертыя доли. Такимъ образомъ видно, что *всякая дробь отъ прибавленія къ членамъ ея поровну приближается къ единицѣ* (т. е. правильная увеличивается, а неправильная уменьшается).

Вычитая по 2 изъ числ. и знам. дроби $^{6}/_{7}$, получимъ дробь $^{4}/_{5}$— меньшую $^{6}/_{7}$. Сдѣлавъ то же съ членами неправ. дроби $^{7}/_{8}$, получимъ $^{5}/_{4}$—дробь, большую $^{7}/_{8}$; слѣд. *при уменьшеніи числит. и знам. на одно число дробь удаляется отъ единицы.*

Можно сказать также, что при измѣненіи числит. и знамен. на одно число, дроби правильныя измѣняются въ томъ же смыслѣ, т. е. увеличиваются съ увеличеніемъ ихъ и уменьшаются съ уменьшеніемъ; дроби же неправ. измѣняются въ обратномъ смыслѣ.

Чтобы доказать это въ общемъ видѣ, возьмемъ дробь $\frac{a}{b}$ и придадимъ къ членамъ ея по m; найдемъ $\frac{a+m}{b+m}$. Приведя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+m}{b+m}$ къ одному знамен., получимъ $\frac{ab+am}{b(b+m)}$ и $\frac{ab+bm}{b(b+m)}$. Изъ этихъ двухъ дробей больше будетъ та, у которой больше числитель; поэтому, если $ab+bm>ab+am$, или $bm>am$, то дробь $\frac{a}{b}$ отъ прибавленія къ ея членамъ числа m увеличилась; но $bm>am$, если $b>a$, т. е. есть дробь правильная. Вычтя по m изъ членовъ дроби $\frac{a}{b}$ найдемъ, что прав. дробь уменьшится отъ этого, а неправ. увеличится.

169. Нахожденіе частей какого-нибудь числа. Дроби $^{5}/_{7}$, $^{3}/_{4}$, $^{7}/_{9}$... означаютъ пять седьмыхъ долей, три четвертыя доли, семь девятыхъ... *долей единицы;* но можетъ случиться, что потребуется найти $^{5}/_{7}$ не отъ единицы, *а отъ нѣсколькихъ единицъ*, напр. $^{5}/_{7}$ отъ 63. Найдемъ сначала одну седьмую: такъ какъ всякая величина содержитъ въ себѣ 7 седьмыхъ долей, то, чтобы найти одну седьмую 63-хъ, должно 63 раздѣлить на 7; получимъ 9; итакъ $^{1}/_{7}$ отъ 63=9; а $^{5}/_{7}$ будетъ въ 5 разъ больше $^{1}/_{7}$; слѣд. чтобы найти $^{5}/_{7}$ отъ 63, должно одну седьмую этого числа, то есть 9, помножить на 5; 9.5=45; слѣд. $^{5}/_{7}$ отъ 63=45. Такъ же найдемъ, что $^{4}/_{9}$ отъ 72=32; $^{3}/_{5}$ отъ 10=6, и т. под.

Можно также находить части отъ какой-нибудь дроби. Напр. найти $^5/_7$ отъ $^3/_4$. Найдемъ сначала $^1/_7$; для этого $^3/_4$ надобно уменьшить въ 7 разъ; а чтобъ уменьшить дробь, должно раздѣлить ея числит. или помножить знамен.; помноживши знамен. на 7, найдемъ, что $^1/_7$ отъ $^3/_4={}^3/_{28}$; а $^5/_7$ должны быть въ 5 разъ больше одной седьмой; слѣд. $^1/_7$ отъ $^3/_4$, или $^3/_{28}$, надо увеличить въ 5 разъ, то есть помножить числит. на 5; получимъ $^{15}/_{28}$.

Примѣры. 1) $^1/$ отъ $^1/_7={}^3/_{35}$; 2) $^3/_3$ отъ $^3/_{18}={}^5/_{18}$;
3) $^5/_8$ отъ $3^1/_5={}^5/_8$ отъ $^{16}/_5=2$.

170. Нахожденіе числа, если извѣстна какая-нибудь его часть. Положимъ, что нужно найти число, котораго пятая доля составляетъ 8 единицъ. Всякое число содержитъ въ себѣ $^5/_5$ долей; слѣд. если $^1/_5$ доля его=8 единицамъ, то все оно будетъ имѣть не 8 единицъ, а въ 5 разъ больше, т. е. 40 единицъ.

Возьмемъ еще задачу: $^5/_8$ неизвѣстнаго числа составляютъ 30 единицъ; найти это число? Для рѣшенія задачи разсуждаемъ такъ: если $^5/_8$ какого-нибуди числа содержатъ 30 единицъ, то въ $^1/_8$ долѣ того же числа будетъ содержаться въ 5 разъ меньше единицъ, потому что $^1/_8$ въ 5 разъ меньше $^5/_8$; поэтому, чтобы найти $^1/_8$ долю его, должно 30 раздѣлить на 5 — получимъ 6. Итакъ $^1/_8$ долц неизв. числа составляетъ 6 единицъ; а какъ все число содержитъ въ себѣ 8 восьмыхъ долей, то слѣд. единицъ въ немъ будетъ въ 8 разъ больше, чѣмъ въ $^1/_8$ его долѣ; т. е. чтобы узнать, сколько въ немъ единицъ, должно 6 умножить на 8; получимъ 48. Итакъ, неизв. число=48. Неизв. число обыкновенно означается буквою x, и все дѣйствіе располагается такимъ образомъ:

$$^5/_8x=30,$$
$$^1/_8x={}^{30}/_5=6,$$
$$^8/_8x=6.8=48.$$

Возьмемъ еще задачу: найти число, котораго $^3/_4$ составляютъ $^7/_{15}$ долей единицы? Отыщемъ сперва $^1/_4$ искомаго числа; такъ какъ $^3/_4$ его$={}^7/_{15}$ единицы, то слѣд. $^1/_4$ будетъ въ 3 раза менѣе, то есть $^7/_{15}$ единицы мы должны уменьшить въ 3 раза; а чтобы уменьшить дробь, должно или числит. ея раздѣлить, или знамен. помножить; такъ какъ числит. 7 не дѣлится безъ остатка на 3, то, помноживъ знамен. на 3, получимъ $^7/_{45}$; поэтому $^1/_4$ неизв. числа$={}^7/_{45}$ единицы; а какъ все число содержитъ въ себѣ 4 четвертыхъ доли, то, чтобы найти его, должно $^7/_{45}$ увеличить въ 4 раза, то есть помножить числит. на 4; получимъ $^{28}/_{45}$; итакъ неизв. число$={}^{28}/_{45}$ долямъ единицы:

$$^3/_4x={}^7/_{15},$$
$$^1/_4x={}^7/_{45},$$
$$x={}^{28}/_{45}.$$

Примѣры. 1) $^3/_{11}x=27$; $^1/_{11}x=9$; $x=99$.
2) $^3/_{34}x={}^{15}/_{17}$; $^1/_{34}x={}^3/_{17}$; $x={}^{102}/_{17}=6$.
3) $3^5/_7x=6^1/_2$; $^{26}/_7x={}^{13}/_2$; $^1/_7x={}^{13}/_{52}={}^1/_4$; $x={}^7/_4$.

171. Вопросы. 1) Что значитъ измѣрить величину? 2) Въ какомъ случаѣ при измѣреніи получается цѣлое число? дробь? цѣлое съ дробью? 3) Что наз. дробью? 4) Что должно знать для того, чтобы получить ясное понятіе о дроби? 5) Какъ обозначается дробь? 6) Что показываетъ числитель? знаменатель? 7) Доказать, что дробь есть частное, происходящее отъ дѣленія числит. на знамен. (напр. что седьмая часть пяти все равно, что $^5/_7$ единицы)? 8) Если при дѣленіи одного числа на другое получится остатокъ, то какъ нужно дополнить частное? 9) Какъ раздѣляются дроби по отношенію величины ихъ къ единицѣ? 10) Какія дроби наз. правильными? неправильными? 11) Когда дробь меньше единицы? равна ей? больше ея? 12) Сколько въ единицѣ пятыхъ долей? девятыхъ? Сколько седьмыхъ долей въ 4 единицахъ? въ 10? 13) Какой знакъ употребляется вмѣсто словъ *больше* и *меньше*? 14) Какъ обратить цѣлое число съ дробью въ неправ. дробь? 15) Какъ исключить цѣлое число изъ неправ. дроби? 16) Какъ увеличить дробь въ нѣсколько разъ? 17) Какъ уменьшить дробь въ нѣсколько разъ? 18) Что сдѣлается съ дробью, если мы умножимъ ея числит. на какое-нибудь цѣлое число? раздѣлимъ знамен.? раздѣлимъ числ.? умножимъ знамен.? 19) Что сдѣлается съ дробью, если числит. и знамен. ея умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число? 20) Сколько видовъ можетъ имѣть одна и та же дробь? 21) Что сдѣлается съ дробью, если мы отбросимъ ея знаменателя (напр. вмѣсто $^3/_8$ возьмемъ 5)?

172. Сокращеніе дробей. Мы видѣли уже, что если числит. и знамен. дроби раздѣлимъ на одно и то же число, то величина дроби не измѣнится. На этомъ основано сокращеніе дробей. *Сократить дробь значитъ представить ее въ простѣйшемъ видѣ, не измѣняя ея величины.* Возьмемъ напр. дробь $^{180}/_{252}$; чтобы сократить ее, посмотримъ, не имѣютъ ли числит. и знамен. общихъ дѣлителей; видимъ, что оба они дѣлятся на 2; поэтому раздѣлимъ ихъ на 2, получимъ $^{90}/_{126}$; эту дробь опять можно сократить на 2, получимъ $^{45}/_{63}$; здѣсь числит. и знамен. можно раздѣлить на 9, и выйдетъ $^5/_7$; 5 и 7 уже не имѣютъ общихъ дѣлителей, и потому $^5/_7$ нельзя сократить. Все дѣйствіе обыкновенно располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\overset{2}{\frac{180}{252}}=\overset{2}{\frac{90}{126}}=\overset{9}{\frac{45}{63}}=\frac{5}{7}.$$

Точно также $\overset{10}{\frac{1680}{2640}}=\overset{8}{\frac{168}{264}}=\overset{3}{\frac{21}{33}}=\frac{7}{11}$; $\overset{100}{\frac{3600}{25200}}=\overset{4}{\frac{36}{252}}=\overset{9}{\frac{9}{63}}=\frac{1}{7}$.

Итакъ, *чтобы сократить дробь, должно дѣлить числит. и знамен. постепенно на ихъ общихъ дѣлителей до тѣхъ поръ, пока въ числит. и знамен. не получатся числа первыя между собою. Если же сразу не видно, имѣютъ ли числит. и знамен. общихъ производителей, то должно найти общаго наибольшаго дѣлителя меж-*

ду числит. и знамен. по способу послѣдовательнаго дѣленія и потомъ раздѣлить на него какъ числит., такъ и знамен. Напр. чтобы сократить дробь $^{14168}/_{19019}$, найдемъ общ. наиб. дѣл. между 14168 и 19019; онъ есть 77, и, раздѣливъ на 77 числителя и знамен., найдемъ, что данная дробь$=^{184}/_{247}$.

Возьмемъ еще дробь $^{231}/_{380}$; сдѣлавши послѣдовательное дѣленіе 231 и 380, увидимъ, что ихъ общ. наиб. дѣл. есть 1; поэтому дробь *несократима*, и ее въ болѣе простомъ видѣ нельзя представить.

Замѣтимъ, что всегда *весьма полезно* сокращать дроби (если это можно сдѣлать), потому что когда числит. и знамен. большія числа, то трудно составить себѣ ясное понятіе о величинѣ дроби; напр. мы не можемъ себѣ ясно представить величину дроби $^{1188}/_{1584}$, потому что намъ не встрѣчалось дѣлить единицу на 1584 части; все, что можно сказать объ этой дроби—это то, что она $> ^1/_2$, потому что въ половинѣ содержится $^{792}/_{1584}$; найдя общ. наиб. дѣл. между числит. и знамен. и сокративъ дробь, увидимъ, что $^{1188}/_{1584}=^3/_4$; теперь величина дроби понятна.

173. Вотъ нѣкоторыя теоремы, относящіяся къ сокращенію дробей.

Теорема 1. *Во всякой несократимой дроби числитель и знаменатель суть числа первыя между собою.* Дѣйствительно, еслибъ они имѣли хоть одного общего дѣлителя, то на него можно было бы ихъ раздѣлить и слѣд. дробь сократилась бы.

Теорема 2. *Если числит. и знамен. дроби взаимно простыя числа, и эта дробь равна другой дроби, то числит. и знамен. второй дроби должны быть въ одинаков число разъ кратны числ. и знаменателю первой.* Пусть $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, гдѣ a и b числа взаимно простыя; умноживъ обѣ дроби на b_1, имѣемъ $\frac{ab_1}{b}=a_1$, такъ какъ a_1 есть цѣлое число, то ab_1 должно дѣлиться на b безъ остатка; но a и b числа первыя между собою, слѣд. b_1 должно дѣлиться на b; пусть $\frac{b_1}{b}=m$, или $b_1=bm$; тогда $a_1=\frac{ab_1}{b}=\frac{abm}{b}=am$; т. е. числит. и знамен. второй дроби въ m разъ кратны числителю и знаменателю первой.

Изъ этой теоремы вытекаютъ слѣдствія:

1) *Дробь, члены которой суть числа взаимно простыя, несократима.* Дѣйствительно, по теор. 2-й всякая дробь, равная данной дроби, имѣющей членами взаимно простыя числа, будетъ имѣть члены большіе, чѣмъ у данной дроби.

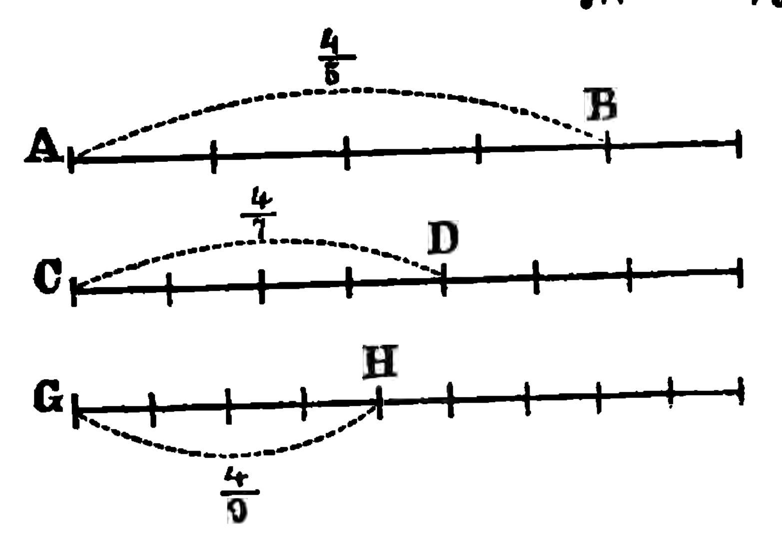
2) *Чтобы привести дробь къ простѣйшему виду должно раздѣлить члены ея на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.* Дѣйствительно, тогда мы получимъ дробь, равную данной, притомъ несократимую, ибо члены ея суть числа взаимно простыя (§ 143).

3) *Не можетъ существовать двухъ несократимыхъ дробей, равныхъ по величинѣ, но различныхъ по виду* (напр. $^3/_7$, $^3/_5$, $^{13}/_{16}$.. не могутъ быть равны никакимъ другимъ несократимымъ дробямъ). Въ

самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, и обѣ дроби несократимы, то (теор. 1) a и b числа взаимно простыя, а потому (теор. 2-я) $a_1=ma$; $b_1=mb$, гдѣ m число цѣлое; слѣд. a_1 и b_1 не могутъ быть меньше a и b; съ другой стороны a_1 и b_1 также числа взаимно простыя, слѣд. $a=na_1$, $b=nb_1$, т. е. a и b не могутъ быть меньше a_1 и b_1. Такимъ образомъ должно быть $a=a_1$, $b=b_1$, слѣд. дроби тожественны.

174. Вопросы. 2) Что значитъ сократить дробь? 2) На чемъ основано сокращеніе дробей? 3) Какъ сократить дробь? 4) Зачѣмъ сокращаютъ дроби? 5) Когда дробь не можетъ быть представлена въ болѣе простомъ видѣ?

175. Сравненіе величины дробей. Возьмемъ дроби $^3/_7$, $^4/_7$, $^3/_7$, $^6/_7$; изъ нихъ самая большая будетъ послѣдняя, потому что она содержатъ седьмыхъ долей шесть, тогда какъ другія имѣютъ тѣхъ же долей меньше; вообще, *изъ нѣсколькихъ дробей съ одинакими знаменателями та больше, у которой числитель больше.* Возьмемъ дроби съ одинакими числителями, напр. $^4/_7$, $^4/_5$, $^4/_9$; наибольшая изъ нихъ будетъ $^4/_5$, потому что въ ней содержится 4 пятыхъ доли, а въ другихъ столько же долей седьмыхъ и девятыхъ; а пятыя доли крупнѣе седьмыхъ и девятыхъ; на чертежѣ видно, что линія AB, означающая $^4/_5$, больше линіи CD, выражающей $^4/_7$, и больше GH, или $^4/_9$. Вообще, *изъ нѣсколькихъ дробей съ равными числителями та больше, у которой знаменатель меньше.* Если же возьмемъ дроби съ разными числит. и знамен., то не всегда можно бываетъ опредѣлить съ перваго взгляда, какая изъ нихъ больше и какая меньше; напр. если возьмемъ дроби $^7/_{13}$ и $^4/_{17}$, то легко видѣть, что вторая меньше, потому что у нея числит. меньше первой, а знамен. больше; точно также изъ дробей $^7/_{15}$ и $^8/_9$ вторая будетъ больше, потому что у нея числит. больше, а знамен. меньше, чѣмъ у первой; а изъ дробей $^3/_5$ и $^7/_{12}$ какая больше? Этого сказать сразу нельзя, потому что хотя во второй дроби части мельче, чѣмъ въ первой, но за то ихъ взято больше, именно 7, а не 3. Чтобы сравнить такія дроби, надобно ихъ выразить въ одинакихъ доляхъ единицы, или, какъ говорятъ, *привести къ одному знаменателю.*



176. Приведеніе дробей къ одному знаменателю. Приведеніе дробей къ одному знаменателю основано на томъ, что мы можемъ числит. и знамен. дроби помножить на одно и то же число, отчего дробь измѣнитъ только свой видъ, а величина ея останется та же. Положимъ, что нужно привести къ одному знамен. дроби $^2/_3$, $^4/_7$, $^3/_5$. Чтобы это сдѣлать, помножимъ числит. и знамен. каждой дроби на всѣхъ прочихъ знаменателей; то есть 3 и 5 помножимъ

на 7 и на 3; 4 н 7 на 5 и на 3; 2 и 3 на 5 и на 7; получимъ:
$\frac{3.7.3}{5.7.3}=\frac{63}{105}$; $\frac{4.5.3}{7.5.3}=\frac{60}{105}$; $\frac{2.5.7}{3.5.7}=\frac{70}{105}$. Теперь и видно, что больше всѣхъ дробь $^{70}/_{105}$, или $^{2}/_{3}$; за ней слѣдуетъ $^{63}/_{105}$, или $^{3}/_{5}$, и наконецъ $^{60}/_{105}$, или $^{4}/_{7}$. Итакъ, чтобы привести дроби къ одному знаменат., должно числит. и знамен. каждой дроби помножить на произведеніе всѣхъ прочихъ знаменателей. Напр. приведемъ еще къ одному знамен. дроби $^{8}/_{9}$, $^{3}/_{4}$ и $^{5}/_{7}$.

$$\frac{8}{9}=\frac{8.4.7}{9.4.7}=\frac{224}{252};\ \frac{3}{4}=\frac{3.9.7}{4.9.7}=\frac{189}{252};\ \frac{5}{7}=\frac{5.9.4}{7.9.4}=\frac{180}{252}.$$

177. Мы брали такія дроби, у которыхъ знаменатели 5, 7 и 3 а также 9, 4 и 7, числа взаимно простыя, или не имѣютъ общихъ дѣлителей; если же знамен. будутъ имѣть общихъ дѣлителей, то для приведенія дробей къ общему знамен. употребляется другой пріемъ.

Возьмемъ напр. дроби $^{7}/_{15}$, $^{4}/_{9}$, $^{5}/_{18}$, $^{11}/_{45}$.

Чтобы привести ихъ къ одному знамен., разложимъ всѣхъ знаменателей на первонач. производит. и найдемъ ихъ наим. кратное:

15=3.5; 9=3.3; 18=2.3.3; 45=3.3.5.

Теперь, какъ мы знаемъ, должно взять одно изъ разложенныхъ чиселъ, напр. 15, и прибавить въ нему тѣхъ производителей, которыхъ въ немъ недостаетъ противъ другихъ чиселъ; изъ 9 надо прибавить 3, изъ 18-ти 2, изъ 45 ничего не прибавлять, и наим. кратное=3.5.3.2=90; теперь будемъ дѣлить 90 на каждаго знам. и полученнымъ частнымъ помножимъ числит. и знам. соотвѣтствующей дроби; получимъ

90 : 15=6; 7.6=42; слѣд. $^{7}/_{15}=^{42}/_{90}$;
90 : 9=10; 4.10=40, слѣд. $^{4}/_{9}=^{40}/_{90}$;
такъ же найдемъ, что $^{5}/_{18}=^{25}/_{90}$; $^{11}/_{45}=^{22}/_{90}$.

178. Замѣтимъ, что данныя дроби можно привести къ одному знаменателю и по первому способу; но только тогда онѣ выразятся въ гораздо большихъ числахъ, чѣмъ выражены теперь; такъ напр. дробь $\frac{7}{15}$ будетъ $=\frac{7.9.18.45}{15.9.18.45}=\frac{51030}{109350}$.

Наоборотъ — приведемъ къ одному знамен. по второму способу дроби $^{3}/_{5}$, $^{4}/_{7}$, $^{2}/_{3}$, знамен. которыхъ числа первыя между собою, и которыя мы уже приводили по первому способу; наим. кратн. будетъ 5.7.3=105; 105:5=21; 105:7=15; 105:3=35; слѣд.

$$\frac{3}{5}=\frac{3.21}{105}=\frac{63}{105};\ \frac{4}{7}=\frac{4.15}{105}=\frac{60}{105};\ \frac{2}{3}=\frac{2.35}{105}=\frac{70}{105}.$$

Получились тѣ же дроби, какъ и при приведеніи по первому способу; но дѣйствіе продолжалось дольше; въ особенности это замѣтно, если взять побольше дробей. Можетъ случиться, что съ перваго взгляда не видно, имѣютъ ли знамен. общихъ дѣлителей или нѣтъ, и рѣшающій задачу затруднится, по какому способу приво-

дить къ одному знам.; тогда должно разложить знаменателей на первонач. дѣлителей, и если окажется, что они имѣютъ общихъ производителей, то находить наим. кратное; если же нѣтъ, то приводить по первому способу.

179. Приведеніе дробей къ одному знамен. посредствомъ нахожденія наим. кратн. допускаетъ нѣкоторыя сокращенія, а именно: мы видѣли, что, нашедши наим. кратн. всѣхъ знаменателей, которое и будетъ общимъ знамен., должно раздѣлить его на каждаго знамен.; но можно, не производя дѣленія, пряно находить частныя.

Возьмемъ напр. дроби $^{17}/_{30}$, $^{31}/_{40}$, $^{8}/_{0}$, $^{5}/_{12}$.

Такъ какъ $30=2.3.5$; $40=2.2.2.5$; $9=3.3$; $12=2.2.3$; то наим. кратн.$=2.3.5.2.2.3=360$. Теперь нужно 360 раздѣлить на каждаго знамен. и полученными частными помножить соотвѣтственныхъ числителей; но чтобы найти эти частныя, не производя дѣленія замѣтимъ, что такъ какъ $30=2.3.5$, а $360=2.2.2.3.3.5$, то $\frac{360}{30}=\frac{2.2.2.3.3.5}{2.3.5}=2.2.3=12$; точно также $\frac{360}{40}=\frac{2.2.2.3.3.5}{2.2.2.5}=$ $=3.3=9$, вообще, *частное=произведенію тѣхъ множителей, которыхъ въ знаменатель недостаетъ сравнительно съ наименьшимъ кратнымъ*; такъ $360:9=2.2.2.5=40$; $360:12=30$.

Такимъ образомъ числит. и знамен. первой дроби нужно умножить на 12, второй на 9, третьей на 40, четвертой на 30; получимъ $^{360}/_{360}$ $^{279}/_{360}$, $^{320}/_{360}$, $^{150}/_{360}$.

180. Можетъ случиться, что одинъ изъ знаменателей будетъ кратнымъ нѣсколькихъ другихъ; напр. въ дробяхъ $^{28}/_{100}$, $^{17}/_{50}$, $^{3}/_{4}$, $^{7}/_{20}$, $^{11}/_{30}$, $^{8}/_{21}$, знаменатель 100 кратный 50, 4 и 10; число, кратное ста, раздѣлится безъ остатка на 50, 4 и 10; поэтому нужно искать наименьшее кратное только 100, 30 и 21—оно равно 2100; поступая по предыдущему, получимъ $^{360}/_{2100}$, $^{714}/_{2100}$, $^{1575}/_{2100}$, $^{1472}/_{2100}$ $^{770}/_{2100}$, $^{800}/_{2100}$.

Если одинъ изъ знамен. дѣлится безъ остатка на всѣхъ остальныхъ, то онъ и будетъ наименьшимъ кратнымъ, или общимъ знаменателемъ; напр. въ дробяхъ $^{5}/_{18}$, $^{3}/_{8}$, $^{7}/_{9}$, $^{11}/_{72}$, $^{2}/_{3}$, общимъ знамен. будетъ 72; дѣля его на каждаго знамен. и полученнымъ частнымъ помножая числителей, получимъ дроби:

$$\frac{5.6}{72}, \frac{3.9}{72}, \frac{7.8}{72}, \frac{11}{72}, \frac{2.24}{72}, \text{ или } \frac{30}{72}, \frac{27}{72}, \frac{56}{72}, \frac{11}{72}, \frac{48}{72}.$$

181. Итакъ, при приведеніи дробей къ одному знаменателю бываютъ 3 случая:

1) *Если всѣ знаменатели не имѣютъ общихъ дѣлителей* (иначе говоря, суть числа взаимно простыя), *то должно числителя и знаменателя каждой дроби помножить на произведеніе знаменателей прочихъ дробей.*

2) *Если знаменатели имѣютъ общихъ дѣлителей, то должно*

найти ихъ наименьшее кратное; оно и будетъ общимъ знаменателемъ; число это должно дѣлить на каждаго знаменателя и полученнымъ частнымъ помножить числителя соотвѣтствующей дроби.

3) Если одинъ знаменатель дѣлится безъ остатка на всѣхъ прочихъ, то должно раздѣлить его на каждаго знамен. и полученнымъ частнымъ помножить числит. соотвѣтствующей дроби.

Примѣры. 1) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}=\frac{2.4.5}{3.4.5}=\frac{40}{60}$; $\frac{3}{4}=\frac{3.3.5}{4.3.5}=\frac{45}{60}$; $\frac{4}{5}=\frac{4.3.4}{5.3.4}=\frac{48}{60}$.

2) $\frac{5}{14}, \frac{11}{21}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}$. Наименьшее кратное $= 2.3.7=42$; $42 : 14=3$; $42 : 21=2$; $42 : 3=14$; $42 : 7=6$; $\frac{5}{14}=\frac{5.3}{14.3}=\frac{15}{42}$; $\frac{11}{21}=\frac{11.2}{21.2}=\frac{22}{42}$; $\frac{2}{3}=\frac{2.14}{3.14}=\frac{28}{42}$; $\frac{4}{7}=\frac{4.6}{7.6}=\frac{24}{42}$.

3) $\frac{113}{256}, \frac{17}{64}, \frac{15}{32}, \frac{3}{4}$. Общій знаменатель $= 256$; первая дробь остается безъ перемѣны; $256 : 64=4$; $256 : 32=8$; $256 : 4=64$; слѣд. $\frac{17}{64}=\frac{17.4}{256}=\frac{68}{256}$; $\frac{15}{32}=\frac{15.8}{256}=\frac{120}{256}$; $\frac{3}{4}=\frac{3.64}{256}=\frac{192}{256}$.

182. Приведеніе дробей къ одному числителю. Чтобы привести къ одному числителю дроби $^3/_8$, $^5/_7$, $^4/_9$, должно числителя и знам. каждой дроби помножить на произведеніе числителей прочихъ дробей; получимъ: $\frac{3.5.4}{8.5.4}=\frac{60}{160}$; $\frac{5.3.4}{7.3.4}=\frac{60}{84}$; $\frac{4.3.5}{9.3.5}=\frac{60}{135}$.

Возьмемъ дроби, которыхъ числители имѣютъ общихъ дѣлителей, напр. $^8/_{15}$, $^8/_{11}$, $^9/_{10}$, $^8/_{[illegible]}$; число 72, наим. кратн. числителей, будетъ общ. числителемъ; дѣля его на каждаго числит. и полученнымъ частнымъ умножая числит. и знамен. каждой дроби, найдемъ $^{72}/_{135}$, $^{72}/_{132}$, $^{72}/_{80}$, $^{72}/_{120}$.

Въ дробяхъ $^8/_{11}$, $^4/_7$, $^2/_3$, $^1/_2$ общимъ числителемъ будетъ 8, и, по приведеніи къ одному числителю, получимъ $^8/_{11}$, $^8/_{14}$, $^8/_{12}$, $^8/_{16}$.

183. Вопросы. 1) Изъ нѣсколькихъ дробей съ одинаками знамен. какая больше и почему? 2) Изъ нѣсколькихъ дробей съ одинаками числит. какая больше и почему? 3) Если имѣемъ нѣсколько дробей съ разными числит. и знамен., то можно ли съ перваго взгляда узнать какая изъ нихъ больше? 4) Зачѣмъ приводятся дроби въ одному знамен.? 5) На чемъ основано приведеніе дробей къ одному знамен.?

6) Сколько можетъ быть случаевъ при приведеніи дробей въ одному знаменателю и какіе они? Какъ поступать въ каждомъ изъ этихъ случаевъ?

184. Раздробленіе дробныхъ именованныхъ чиселъ. Сколько заключается фунтовъ, лот. и золотн. въ $^{79}/_{192}$ пуда?

Разсуждаемъ такимъ образомъ: въ пудѣ 40 фунтовъ; въ $^1/_{192}$

пуда будетъ въ 192 раза менѣе фунтовъ, то есть $^{40}/_{192}={}^{5}/_{24}$ фун.; въ $^{79}/_{192}$ въ 79 разъ больше, чѣмъ въ $^{1}/_{192}$; слѣд. должно $^{5}/_{24}$ увеличить въ 79 разъ; получимъ $\frac{5.79}{24}=\frac{395}{24}=16^{11}/_{24}$ фун. Одинъ фун. имѣетъ 32 лота; $^{1}/_{24}$ ф. имѣетъ $^{32}/_{24}={}^{4}/_{3}$ лота въ $^{11}/_{24}$ фун. будетъ въ 11 разъ больше лот., чѣмъ въ $^{1}/_{24}$, то есть $^{44}/_{3}=14^{2}/_{3}$ лота; въ одномъ лотѣ 3 золотника; въ $^{1}/_{3}$ лота въ три раза меньше, то есть 1 золот., въ $^{2}/_{3}$ лота—2 золот. Слѣд. $^{79}/_{192}$ пуда=16 фун. 14 лот. 2 золот. Такимъ образомъ простое дробное именов. число $^{79}/_{192}$ пуда мы представили въ видѣ составного именов. числа. Вотъ еще примѣры:

1) Въ $^{111}/_{800}$ версты сколько саженъ, футовъ...?
Въ 1 верстѣ 500 саженъ; въ $^{1}/_{800}$ верс. будетъ въ 800 разъ меньше саженъ, т. е. $^{500}/_{800}={}^{5}/_{8}$; въ $^{177}/_{800}$ верс. будетъ въ 177 разъ больше саженъ, чѣмъ въ $^{1}/_{800}$; т. е. надо $^{5}/_{8}$ увеличить въ 177 разъ; найдемъ, что $^{177}/_{800}$ версты$={}^{885}/_{8}$ саж.$=110^{5}/_{8}$ саж. Въ одной сажени 7 фут.; $^{1}/_{8}$ саж.$={}^{7}/_{8}$ фута; въ $^{5}/_{8}$ саж. будетъ $^{35}/_{8}$ фута$=4^{3}/_{8}$ фута; 1 футъ=12 дюйм.; $^{1}/_{8}$ фута$={}^{12}/_{8}$ дюйм.; $^{3}/_{8}$ фута$={}^{36}/_{8}$ дюйм.$=4^{4}/_{8}$ дюйм.$=4^{1}/_{2}$ дюйм. Въ одномъ дюймѣ 10 линій; стало быть въ $^{1}/_{2}$ дюйма будетъ 5 линій. Итакъ $^{177}/_{800}$ версты=110 саж. 4 фута 4 дюйм. 5 лин.

2) $^{101}/_{300}$ сутокъ выразить состав. именов. числомъ?
1 сут.=24 час.; $^{1}/_{300}$ сут.$={}^{24}/_{300}$ час.$={}^{2}/_{25}$ час.; $^{101}/_{300}$ сут.$=$ $={}^{202}/_{25}=8^{2}/_{25}$ часа; 1 часъ=60 мин., $^{1}/_{25}$ часа$={}^{60}/_{25}={}^{12}/_{5}$ мин.; $^{2}/_{25}$ часа$={}^{24}/_{5}$ мин.$=4^{4}/_{5}$ мин.; 1 мин.=60 сек., $^{1}/_{5}$ мин.$={}^{60}/_{5}=12$ сек.; $^{4}/_{5}$ мин.=48 сек. Слѣд. $^{101}/_{300}$ сут.=8 час. 4 м. 48 сек.

3) Въ $^{13}/_{48}$ десятины сколько квадр. арш.?
1 дес.=2400 кв. саж.=2400.9=21600 кв. арш.; $^{1}/_{48}$ дес.$=$ $={}^{21600}/_{48}=450$ кв. арш.; $^{13}/_{48}$ дес.=450.13=5850 кв. арш.

4) Въ $^{11}/_{96}$ аптекар. фунта сколько гранъ?
1 апт. фун.=12 унц.; 1 ун.=8 др.; 1 др.=3 скр.; 1 скр.= =20 гр. слѣд. 1 апт. фун.=12.8.3.20=5760 гр.; $^{1}/_{96}$ апт. фун.$={}^{5760}/_{96}=60$ г.; $^{11}/_{96}$ апт. фунт.=60.11=660 гр.

185. Превращеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

Пусть требуется $93^{1}/_{3}$ сажени обратить въ мили?

Такъ какъ миля имѣетъ 3500 саж., то чтобъ обратить $93^{1}/_{3}$ саж. въ мили, должно узнать, какую часть отъ 3500 саж. составляютъ $93^{1}/_{3}$ саж. Обративъ $93^{1}/_{3}$ саж. въ неправильную дробь, получимъ $^{280}/_{3}$ и будемъ разсуждать такъ: 1 сажень составляетъ $^{1}/_{3500}$ мили, $^{1}/_{3}$ саж. составляетъ часть втрое меньшую, т. е. $^{1}/_{10500}$ мили; а $^{280}/_{3}$ составитъ часть въ 280 разъ большую, чѣмъ $^{1}/_{3}$, т. е. $^{280}/_{10500}=$ $={}^{2}/_{75}$ мили.

Примѣры. 1) $3^{1}/_{3}$ фута составляютъ какую часть версты?
1 вер. 3500=фут.; слѣд. 1 футъ$={}^{1}/_{3500}$ версты; $^{1}/_{3}$ фута$={}^{1}/_{10500}$ вер.; а $3^{1}/_{3}={}^{10}/_{3}$ фута$={}^{10}/_{10500}={}^{1}/_{1050}$ версты.

2) 17 фун. 4 лота $1^5/_7$ золот. превратить въ пуды?

Раздробивъ данное число въ золотники, найдемъ $1645^5/_7$ золот.$=$ $=^{71580}/_7$ золот. Такъ какъ 1 пудъ$=40.32.3=3840$ золот., то 1 зол.$=^1/_{3840}$ пуда; $^1/_7$ зол.$=^1/_{26880}$ пуда; $^{11520}/_7$ золот.$=^{11520}/_{26888}$ пуда$=^3/_7$ пуда (по сокращ. на 3840).

3) Какую часть стопы составляютъ $7^1/_2$ листовъ?

1 листъ$=^1/_{140}$ ст., $^1/_2$ лис.$=^1/_{960}$ ст., $7^1/_2=^{15}/_2$ лис.$=^{15}/_{960}=^1/_{64}$ ст.

4) 2 часа 33 мин. превратить въ сутки?

1 мин.$=^1/_{1440}$ сут.; 2 ч. 33 м.$=153$ м.$=^{153}/_{1440}=^{17}/_{160}$ сут.

186. Сложеніе дробей. Положимъ, что надо сложить дроби $^1/_7+^1/_5+^3/_4$. Выразимъ ихъ въ одинаковыхъ доляхъ единицы (т. е. приведемъ къ одному знаменателю); получимъ: $^{80}/_{140}+^{28}/_{140}+^{105}/_{140}$; $80+28+105$ стосороковыхъ составитъ 213 стосороковыхъ, слѣд. $^{80}/_{140}+^{28}/_{140}+^{105}/_{140}=^{213}/_{140}=1^{73}/_{140}$. Итакъ, *для сложенія дробей должно привести ихъ къ одному знаменателю, потомъ сложить числителей и оставить того же знаменателя.*

Если даны при дробяхъ и цѣлыя числа, то цѣлыя числа должно складывать съ цѣлыми, а дроби съ дробями. Напр.

1) $2^7/_8+3^1/_2+1^3/_4=2^7/_8+3^4/_8+1^6/_8=6^{17}/_8=8^1/_8$

2) $2^7/_{15}+4^{11}/_{24}+^7/_8+5^{11}/_{12}=2^{51}/_{120}+4^{81}/_{120}+^{140}/_{120}+5^{110}/_{120}=$ $=11^{336}/_{120}=13^{96}/_{120}=13^4/_5$.

3) Найти сумму четырехъ чиселъ, изъ которыхъ первое$=36$, а каждое слѣдующе$=^5/_{12}$ предыдущего.

Такъ какъ $^5/_{12}$ отъ 36-и есть 15, то слѣд. 15 будетъ 2-е слагаемое; 3-е слагаемое$=^5/_{12}$ отъ 15-и$=6^1/_4$; 4-е$=^5/_{12}$ отъ $6^1/_4=2^{29}/_{48}$; $36+15+6^1/_4+2^{29}/_{48}=59^{12}/_{48}+^{29}/_{48}=59^{41}/_{48}$.

4) Виноторговецъ имѣетъ 4 боченка вина; въ одномъ боченкѣ $7^4/_9$ ведра; въ другомъ $10^1/_4$ вед.; въ 3-мъ столько, сколько въ первыхъ двухъ вмѣстѣ; въ 4-мъ на $5^8/_{12}$ вед. больше, чѣмъ въ 3-мъ. Сколько ведеръ вина во всѣхъ боченкахъ?

Рѣш. $7^4/_9+10^1/_4+7^4/_9+10^1/_4+7^4/_9+10^1/_4+5^8/_{12}=60$ вед.

5) Для переписки сочиненія въ 80 листовъ наняты 4 писца; первый могъ бы одинъ переписать сочиненіе въ 24 час., второй въ 36, третій въ 20, четвертый въ 18 час. Сколько листовъ напишутъ они въ 1 час., если будутъ работать вмѣстѣ?

Первый писецъ перепишетъ въ часъ $^1/_{24}$ всего сочиненія, второй $^1/_{36}$, третій $^1/_{20}$, четвертый $^1/_{18}$. Сложивъ эти дроби, найдемъ, что всѣ писцы перепишутъ въ 1 часъ $^7/_{40}$ сочиненія; взявъ $^7/_{40}$ отъ 80-и, узнаемъ, что всего будетъ переписано 14 листовъ.

187. Сложеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ. Пусть дано сложить $4^2/_5$ сажени съ $7^3/_{10}$ арш. Обратимъ саж. въ арш.; $4^2/_5$ саж.$=^{22}/_5$ саж.$=^{66}/_5$ арш.$=13^1/_5$ арш.; слѣд. $4^2/_5$ саж.$+7^3/_{10}$ арш.$=13^1/_5$ арш.$+7^3/_{10}$ арш.$=13^2/_{10}+7^3/_{10}=20^5/_{10}=20^1/_2$ арш.

Итакъ, *при сложеніи дробиыхъ именов. чиселъ нужно привести ихъ въ одно наименовоніе и складывать какъ простыя числа.*

Напр. 1) Сложить $^{37}/_{150}$ сут. съ 13 час. 40 мин. и $4^{31}/_{75}$ час.?

Обратнвъ всѣ слагаемыя въ минуты, найдемъ $^{37}/_{150}$ сут.$=355^1/_5$ мин.; 13 час. 40 мпн.$=820$ мин.; $4^{31}/_{75}$ час.$=^{331}/_{75}$ часа$=264^4/_5$ мин.; сложивъ $355^1/_5+820+264^4/_5$, получимъ 1440 мин.$=1$ сут.

Рѣшимъ ту же задачу, обративъ всѣ слагаемыя въ сутки; 13 час. 40 мин.$=820$ нин.$=^{820}/_{1440}=^{41}/_{72}$ сут.; $4^{31}/_{75}$ час.$=^{331}/_{75}$ час.$=$ $=^{331}/_{1800}$ сут.; $^{37}/_{150}+^{41}/_{72}+^{331}/_{1800}=^{444}/_{1800}+^{1025}/_{1800}+^{331}/_{1800}=$ $=^{1800}/_{1800}=1$ сут.

2). Сложить $2^9/_{25}$ пуда съ 16 ф. 29 лот. $2^3/_5$ зол. и 3 п. $8^2/_3$ ф.?

Обратимъ второе и третье слагаемыя въ пуды; 16 ф. 29 л. $2^3/_5$ зол.$=1625^3/_5$ зол.$=^{8128}/_5$ зол.$=^{127}/_{300}$ пуд; $8^2/_3$ фунт.$=^{26}/_3$ фун.$=^{26}/_{120}=^{13}/_{60}$ пуда, слѣд. 3 пуд. $8^2/_3$ фун.$=3^{13}/_{60}$ пуд.; $2^9/_{25}+^{127}/_{300}+2^{13}/_{60}=2^{108}/_{300}+^{127}/_{300}+3^{65}/_{300}=6$ пуд.

Выразимъ теперь данныя слагаемыя въ видѣ составвыхъ именов. чиселъ; $^9/_{25}$ пуда$=^{360}/_{25}$ фун.$=14^{10}/_{25}=14^2/_5$ фун.; $^2/_5$ ф.$=$ $=^{64}/_5$ лот.$=12^4/_5$ лот.; $^4/_5$ лот.$=^{12}/_5=2^2/_5$ зол.; итакъ первое слагаемое$=2$ пуд. 14 ф. 12 л. $2^2/_5$ зол. Въ третьемъ слагаемомъ нужно $^2/_3$ фун. выразить въ лот. и золот.; $^2/_3$ ф.$=^{64}/_3$ л.$=21^1/_3$ лота$=21$ л. 1 золот. Теперь надо сложить 2 пуда 14 ф. 12 л. $2^2/_5$ зол.$+16$ ф. 29 л. $2^3/_5$ зол.$+3$ пуд. 8 ф. 21 л. 1 зол. Для этого начнемъ складывать съ единицъ низшаго названія; $2^2/_5$ зол.$+2^3/_5$ зол.$+1$ зол.$=5^5/_5$ зол.$=6$ зол.$=3$ лот.; 12 л.$+29$ л.$+21$ л.$=62$ л., да еще два лота, полученные при сложеніи зол., всего 64 лота т. е. 2 ф.; складывая фунты, получимъ 38 фун.; да еще 2 ф., полученные при сложеніи лот., всего 40 фун., т. е. 1 пудъ; складывая пуды, получимъ 6 пуд.

188. **Вопросы.** 1) Какъ складываются дроби съ одинаковыми знаменателями? съ равными? 2) Какъ поступать, если для сложенія даны будутъ и дроби, и цѣлыя числа? 3) Какъ поступать при сложевіи дробныхъ именов. чиселъ?

189. Вычитаніе дробей. *При вычитаніи дробей должно привести ихъ къ одному знаменателю, потомъ вычесть только числителей и оставить того же знаменателя; если даны будутъ и цѣлыя числа, то цѣлое вычитается изъ цѣлаго, а дробь изъ дроби.* Напр. $3^5/_7-2^2/_3=3^{15}/_{21}-2^{14}/_{21}=1^1/_{21}$.

Положимъ еще, что изъ $4^2/_5$ должно вычесть $2^3/_4$. Приведя эти дроби къ одному знамен., получимъ: $4^2/_5-2^3/_4=4^8/_{20}-2^{15}/_{20}$; 15 изъ 8 вычесть нельзя; поэтому займемъ одну едивицу отъ 4 и обратимъ ее въ 20-я доли; единица содержитъ $^{20}/_{20}$; придавъ $^{20}/_{20}$ къ $^8/_{20}$, получимъ $^{28}/_{20}$; 15 изъ 28 можно вычесть, получимъ 13. Итакъ $4^8/_{20}-2^{15}/_{20}=3^{28}/_{20}-2^{15}/_{20}=1^{13}/_{20}$. Поэтому, *если приведя дроби къ одному знамен., увидимъ, что дробь вычитаемая болѣе уменьшаемой, то должно занять единицу у цѣлаго уменьшаемаго*

числа и обратить ее въ тѣ доли, которыя даны для вычитанія; тогда вычесть уже будетъ можно. Такъ же должно поступать и при вычитаніи дроби изъ цѣлаго числа.

Напр. $3-1^7/_9=2^9/_9-1^7/_9=1^2/_9$.

Примѣры: 1) Вычислить $5^3/_8-\{(4^7/_{15}+{}^{17}/_{60})-(2^2/_5-1^3/_4)\}$? Чтобы сдѣлать вычисленіе, нужно сложить $4^7/_{15}$ съ $^{17}/_{60}$, потомъ вычесть $1^3/_4$ изъ $2^2/_5$; полученную разность вычесть изъ суммы; наконецъ новую разность вычесть изъ $5^3/_8$. Получимъ:
$4^7/_{15}+{}^{17}/_{60}=4^{28}/_{60}+{}^{17}/_{60}=4^{45}/_{60}=4^3/_4$;
$2^2/_5-1^3/_4=2^8/_{20}-1^{15}/_{20}=1^{28}/_{20}-1^{15}/_{20}={}^{13}/_{20}$;
$(4^7/_{15}+{}^{17}/_{60})-(2^2/_5-1^3/_4)=4^3/_4-{}^{13}/_{20}=4^{15}/_{20}-{}^{13}/_{20}=4^2/_{20}=4^1/_{10}$.
Остается вычесть $4^1/_{10}$ изъ $5^3/_8$;
$5^3/_8-4^1/_{10}=5^{15}/_{40}-4^1/_{40}=1^{11}/_{40}$. Итакъ, все выраженіе$=1^{11}/_{40}$.

2) Что сдѣлается съ разностью, если къ уменьшаемому придать $3^{17}/_{24}$, а къ вычитаемому $5^{11}/_{36}$? Разность уменьшится на $5^{11}/_{36}-3^{17}/_{24}=5^{22}/_{72}-3^{51}/_{72}=4^{94}/_{72}-3^{51}/_{72}=1^{43}/_{72}$.

3) Найти такое число, что если изъ $^7/_{12}$ его вычесть $^8/_{15}$ его то получимъ 18? По условію задачи имѣемъ $^7/_{12}x-{}^8/_{15}x=18$; или $^3/_{60}x={}^1/_{20}x=18$? $x=360$.

190. Вычитаніе дробныхъ именованныхъ чиселъ. Изъ $1^7/_{16}$ пуда вычесть $23^{11}/_{12}$ фун.? Раздробимъ уменьшаемое въ фун.; 1 пудъ имѣетъ 40 фун.; $^1/_{16}$ пуд. $={}^{40}/_{16}$ фун., $^7/_{16}$ пуд. $={}^{280}/_{16}$ фун.$=17^8/_{16}=17^1/_2$ фун.; стало быть $1^7/_{16}$ пуд.$=57^1/_2$ фун.; вычитая $23^{11}/_{12}$ фун. изъ $57^1/_2$ фун., получимъ $57^1/_2-23^{11}/_{12}=57^6/_{12}-23^{11}/_{12}=56^{18}/_{12}-23^{11}/_{12}=33^7/_{12}$ фун.

Если бы обратили вычитаемое въ пуды, то нашли бы $23^{11}/_{12}$ фун.$={}^{287}/_{12}$ фун.$={}^{287}/_{480}$ пуда; $1^7/_{16}$ пуд.$-{}^{287}/_{480}$ пуд.$=1^{210}/_{480}-{}^{287}/_{480}={}^{690}/_{480}-{}^{287}/_{480}={}^{403}/_{480}$ пуд. Обративъ это въ фунты, получимъ прежній результатъ. Итакъ, *при вычитаніи дробныхъ именованныхъ чиселъ надо привести ихъ въ мѣры одного названія и поступать какъ съ простыми числами.*

Примѣры. 1) Изъ 3 час. $28^3/_8$ мин. вычесть 1 ч. 54 м. $18^1/_2$ сек. Обратимъ данныя числа въ секунды; 3 ч. $28^3/_8$ м.$=208^3/_8$ мин.$={}^{1667}/_8$ м.$={}^{100020}/_8$ сек.$=12502^1/_2$ сек.; 1 ч. 54 м. $18^1/_2$ с.$=6858^1/_2$ сек.; $12502^1/_2-6858^1/_2=5644$ сек.$=1$ ч. 34 м. 4 с.

2) Изъ $7^{963}/_{4000}$ верс. вычесть 6 верс. 370 саж. $1^1/_8$ арш. Обратимъ вычитаемое въ версты; для этого сперва 370 саж. $1^1/_8$ арш. раздробимъ въ аршины; 370 саж. $1^1/_8$ арш.$=1111^1/_8$ ар.$={}^{8889}/_8$ ар.$={}^{8889}/_{12000}$ верс.$={}^{2963}/_{4000}$ верс.; вычитая $6^{2963}/_{4000}$ изъ $7^{963}/_{4000}$, получимъ $7^{963}/_{4000}-6^{2963}/_{1000}=6^{4963}/_{4000}-6^{2963}/_{4000}={}^{2000}/_{4000}={}^1/_2$ верс.

Рѣшимъ ту же задачу, выразивъ уменьшаемое въ видѣ составного числа; $^{963}/_{4000}$ верс.$=120^3/_8$ саж.; $^3/_8$ саж.$=1^1/_8$ арш.; итакъ $7^{963}/_{4000}$ верс.$=7$ вер. 120 саж. $1^1/_8$ арш.; вычтемъ отсюда 6 верс. 370 саж. $1^1/_8$ арш.; начавъ вычитаніе съ мѣръ низшаго названія, получимъ разность 250 саж., или $^1/_2$ версты.

3) Метръ=$22^2/_5$ верш.; на сколько вершковъ $1^1/_2$ метра больше $1^3/_4$ аршина? Такъ какъ 1 мет.=$22^2/_5$=$^{112}/_5$ верш., то $^1/_2$ мет.= =$^{112}/_{10}$=$^{56}/_5$ вер.; а $1^1/_2$ мет. = $^3/_2$ мет. = $^{168}/_5$ = $33^3/_5$ верш.; $^1/_4$ арш.=4 верш., $^3/_4$ арш.=12 верш., $1^3/_4$ арш.=28 вер.; слѣд. $1^1/_2$ мет.—$1^3/_4$ арш.=$33^3/_5$ вер.—28 в.=$5^3/_5$ в.

191. Вопросы. 1) Какъ дѣлаетск вычитаніе дробей? 2) Какъ поступать въ томъ случаѣ, когда дробь вычитаемая больше уменьшаемой? 3) Какъ вычитать дробь изъ цѣлаго числа? 4) Какъ постукать при вычитвніи дробныхъ именов. чиселъ?

192. Умноженіе дробей. При умноженіи дробей могутъ быть слѣдующіе случаи:

1) *Умножить дробь на цѣлое число.* Положимъ, что надо $^3/_{10}$ умножить на 2; это значитъ $^3/_{10}$ увеличить въ два раза; а чтобъ увеличить дробь, должно или умножить ея числителя, или раздѣлить знаменателя; получимъ $^3/_{10}.2$=$^6/_{10}$=$^3/_5$. Итакъ, *чтобъ умножить дробь на цѣлое число, должно или числителя умножить, или знаменателя раздѣлить на это число.*

2) *Умножить цѣлое число на дробь.* Положимъ, что требуется умножить 3 на $^2/_7$. Мы знаемъ, что умножить одно число па другое значитъ множимое повторить слагаемымъ столько разъ, сколько во множителѣ единицъ; напр. 7 умножить на 5 значитъ 7 повторить 5 разъ, или увеличить въ 5 разъ; $^3/_8$ умножить на 4 значитъ $^3/_8$ увеличить въ 4 раза; но что же значитъ 3 умножить на $^2/_7$? Вѣдь нельзя же 3 сложить само съ собою $^2/_7$ раза или 3 увеличить въ $^2/_7$ раза; слѣд., то опредѣленіе умвоженія, которое мы сейчасъ сказали, годится только тогда, когда множитель есть цѣлое число, и потону нужно составить другое опредѣленіе, которое бы годилось и для того случая, когда множитель есть цѣлое число и для того, когда онъ есть дробь. Если мы скажемъ, что *умножить одно число на другое значитъ изъ множимаго составить новое число точно такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы*, то такоз опредѣленіе будетъ совершенно вѣрно; напр. 7 умножить на 5 значитъ изъ 7 составить число точно такъ, какъ 5 составлено изъ единицы; по 5=1+1+1+1+1; то есть 5 составлено изъ единицы такимъ образомъ, что единица повторена слагаемымъ пять равъ; поэтому и 7 должно повторить 5 разъ и получимъ 7+7+7+7+7=35. Давши такое опредѣленіе уиноженію, мы можемъ вывести правило для умноженія цѣлаго числа на дробь. Умножить 3 на $^2/_7$ значитъ изъ 3-хъ составить новое число такъ, какъ $^2/_7$ составлено изъ единицы; какъ же $^2/_7$ составлено изъ единицы? Единица раздѣлена на 7 равныхъ частей, и такихъ частей взято 2; слѣд. и 3 надобно раздѣлить на 7 частей, получимъ $^3/_7$, и такихъ частей взять 2—получимъ $^6/_7$; поэтому 3.$^2/_7$=$^6/_7$. Итакъ, *чтобъ умножить цѣлое число на дробь, должно цѣлое умножить*

на числителя и произведеніе раздѣлить на знаменателя. Напр. $4.\frac{5}{8}=\frac{20}{8}=2\frac{1}{2}$; $6.\frac{2}{3}=4$; $8.\frac{5}{32}=1\frac{1}{4}$, и т. под.

3) *Умножить дробь на дробь.* Положимъ, что дано умножать $\frac{3}{5}$ на $\frac{4}{11}$; это значитъ изъ $\frac{3}{5}$ надо составить новое число точно такъ, какъ $\frac{4}{11}$ составлено изъ единицы; но для составленія $\frac{4}{11}$ единица была раздѣлена на 11 равныхъ частей, и такихъ частей взято 4; слѣд., и $\frac{3}{5}$ должно раздѣлить на 11 частей, то есть уменьшать въ 11 разъ; а чтобь уменьшить дробь, должно ея знамен. помножить на 11, получимъ $\frac{3}{55}$; потомъ одиннадцатую часть повторить 4 раза, то есть $\frac{3}{55}$ помножить на 4—получимъ $\frac{12}{55}$; слѣд. $\frac{3}{5}.\frac{4}{11}=\frac{12}{55}$. Итакъ, *чтобъ умножить дробь на дробь, должно числителя помножить на числителя, а знаменателя на знаменателя и первое произведеніе раздѣлить на второе.*

Напр. $\frac{8}{9}.\frac{11}{25}=\frac{88}{225}=\frac{11}{12}$; $\frac{7}{9}.\frac{3}{14}=\frac{21}{126}=\frac{1}{6}$, и т. под.

4) *Если при дробяхъ будутъ даны цѣлыя числа, то должно цѣлыя числа съ дробями обратить* въ *неправильныя дроби и поступать по предыдущимъ правиламъ.* Напр. $2.3\frac{3}{4}=2.\frac{15}{4}=$ $=\frac{30}{4}=7\frac{1}{2}$; $3\frac{5}{9}.4\frac{5}{16}=\frac{32}{9}.\frac{69}{16}=\frac{2208}{144}=15\frac{1}{3}$ и т. под.

193. Легко также найти произведеніе нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ всѣ или нѣкоторые будутъ дроби или цѣлыя числа съ дробями, напр. $1\frac{3}{8}.\frac{4}{33}.2.\frac{5}{7}.\frac{3}{5}.1\frac{2}{5}=\frac{11}{8}.\frac{4}{33}.2.\frac{5}{7}.\frac{3}{5}.\frac{7}{5}$. Теперь нужно перемножать всѣхъ числителей, полученное произведеніе помножить на цѣлое число 2 и раздѣлить на произведеніе знаменателей; но лучше, не дѣлая умноженія на самомъ дѣлѣ, только означить дѣйствіе и потомъ уничтожить въ числителѣ и знаменателѣ общихъ производителей; получимъ $\frac{11.4.2.5.3.7}{8.33.7.5.5}$, что, по сокращеніи на 11.4.2.5.3.7, даетъ $\frac{1}{5}$.

194. Правила для умноженія дробей можно вывести еще слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что дано умножить 3 на $\frac{2}{7}$; помножимъ сначала 3 на 2, получимъ 6; но это произведеніе невѣрно, потому что намъ дано было умножить 3 на $\frac{2}{7}$, а мы умножили 3 на цѣлое число 2; слѣд., мы увеличили множителя въ 7 разъ (потому что 2 больше $\frac{2}{7}$ въ семь разъ); а потому и произведеніе вышло въ 7 разъ больше истиннаго, и, чтобъ исправить ошибку, должно его уменьшить въ 7 разъ, т. е. раздѣлить 6 на 7; получимъ $\frac{6}{7}$.

Чтобъ умножить $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{7}$, умножимъ сперва $\frac{2}{5}$ на 3, получимъ $\frac{6}{5}$; но такъ какъ мы множителя увеличили въ 7 разъ (потому что вмѣсто $\frac{3}{7}$ взяли 3 цѣлыхъ), то и произведеніе увеличилось въ 7 разъ, и, чтобъ исправить ошибку, его должно уменьшить въ 7 разъ, т. е. умножить знаменателя на 7; получимъ $\frac{6}{35}$.

Примѣры. 1) $2\frac{11}{20}\ .\ 3\frac{7}{9}\ .\ \frac{45}{867}\ .\ 4=\frac{51}{20}\ .\ \frac{34}{9}\ .\ \frac{45}{867}\ .\ 4=$ $=\frac{51.34.45.4}{20.9.867}=2$

2) $(5\,^{7}/_{15}+3\,^{13}/_{20})\ .\ 8\,^{4}/_{7}=(5\,^{28}/_{60}+3\,^{39}/_{60})\ .\ 8\,^{4}/_{7}=8\,^{41}/_{60}\ .\ 8\,^{4}/_{7}=$ $=\,^{521}/_{60}.\,^{60}/_{7}=\frac{521.60}{60.7}=\,^{521}/_{7}=74\,^{3}/_{7}$.

3) $(11\,^{1}/_{2}-10\,^{3}/_{8})\ .\ 5\,^{2}/_{3}-(2\,^{1}/_{3}-1\,^{7}/_{9})\ .\ 1\,^{4}/_{5}=(11\,^{4}/_{8}-10\,^{3}/_{8}).5\,^{2}/_{3}-$ $-(2\,^{3}/_{9}-1\,^{7}/_{9})\ .\ 1\,^{4}/_{5}=1\,^{1}/_{8}\ .\ 5\,^{2}/_{3}-\,^{5}/_{9}\ .\ 1\,^{4}/_{5}=\,^{9}/_{8}\ \ ^{17}/_{3}-\,^{5}/_{9}\ .\ ^{9}/_{5}=$ $=\frac{9.17}{8.3}-\frac{5.9}{9.5}=\frac{3.17}{8}-1=\,^{51}/_{8}-1=5\,^{3}/_{8}$.

195. Умноженіе дробныхъ именованныхъ чиселъ. Сколько можно проѣхать въ двое сутокъ $10\,^{1}/_{2}$ часовъ, проѣзжая въ часъ по 11 верстъ 175 саж.?

Въ 2 сут. $10\,^{1}/_{2}$ час. можно проѣхать больше, чѣмъ въ 1 часъ, во столько разъ, сколько часовъ содержится въ 2 сут. $10\,^{1}/_{2}$ час.; итакъ, для рѣшенія задачи надо обратить 2 сут. $10\,^{1}/_{2}$ час. въ часы и умножить 11 вер. 175 саж. на полученное число часовъ, т. е. на $58\,^{1}/_{2}$; 11 вер. 175 саж. $=11\,^{175}/_{500}$ вер. $=11\,^{7}/_{20}=\,^{227}/_{20}$ вер.; $^{227}/_{20}\ .\ 58\,^{1}/_{2}=\,^{227}/_{20}\ \ ^{117}/_{2}=\,^{26559}/_{40}=663\,^{39}/_{40}$ вер. $=663$ вер. $487\,^{1}/_{2}$ саженъ.

Множимое можно и не приводить въ мѣры одного названія, а умножимъ сперва 175 саж. на $^{117}/_{2}$; получимъ тогда $^{20475}/_{2}=10237\,^{1}/_{2}$ саж., или 20 верстъ $237\,^{1}/_{2}$ саж.; затѣмъ умножая 11 верстъ на $^{117}/_{2}$, найдемъ $643\,^{1}/_{2}$ вер.; придавъ сюда 20 вер., полученныя при умноженіи саженъ, найдемъ $663\,^{1}/_{2}$ вер. $=663$ вер. 250 саж.; 250 саж. да $237\,^{1}/_{2}$ саж., полученныя прежде, составитъ $487\,^{1}/_{2}$ саж.; слѣд., произведеніе $=663$ вер. $487\,^{1}/_{2}$ саж.

Примѣры. 1) 3 пуда 7 ф. 8 л. 2 зол. $\times 1\,^{5}/_{7}$? Такъ какъ $1\,^{5}/_{7}=\,^{12}/_{7}$, то данное число должно умножить на 12 и произведеніе раздѣлить на 7; умноживъ на 12, получимъ 38 пуд. 7 ф. 8 лот.; раздѣливъ это число на 7, найдемъ 5 пуд. 18 ф. 5 л. $2\,^{1}/_{7}$ з.

2) 1 часъ $17\,^{11}/_{12}$ мин. умножить на $2\,^{2}/_{5}$? Обративъ множимое въ минуты, получимъ $^{935}/_{12}$ мин.; $^{935}/_{12}.2\,^{2}/_{5}=\,^{935}/_{12}.\,^{12}/_{5}=\,^{935}/_{5}=187$ мин. $=3$ ч. 7 мин.

196. При умноженіи цѣлыхъ чиселъ мы уже доказали, что отъ перемѣны порядка производителей произведеніе не измѣняется; напр. $7.5=5.7$; то же самое можемъ теперь доказать и для дробей; дѣйствительно, $2.\,^{3}/_{5}=\,^{6}/_{5}$ и $^{3}/_{5}.\ 2=\,^{6}/_{5}$; слѣд. $2.\,^{3}/_{5}=\,^{3}/_{5}.2$; точно также $^{3}/_{7}.\,^{3}/_{4}=\,^{3}/_{4}.\,^{3}/_{7}$; $1\,^{3}/_{4}.2\,^{1}/_{2}=2\,^{1}/_{2}.1\,^{3}/_{4}$, и т. под.

197. Мы видѣли, что умножить одно число на другое значить изъ множимаго составить произведеніе такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы; слѣд. умножить 3 на $^{2}/_{5}$ значитъ найти двѣ пятыхъ доли числа трехъ; умножить $^{3}/_{4}$ на $^{7}/_{9}$ значитъ найти $^{7}/_{9}$ отъ $^{3}/_{4}$, и т. под.; поэтому и наоборотъ, чтобы найти $^{3}/_{4}$ или $^{5}/_{8}$ и т. под. отъ какого-нибудь числа, должно это число умножить на $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{8}$ и т. д. Напр. $^{5}/_{8}$ отъ $16=16\ .\ ^{5}/_{8}=10$; $^{3}/_{4}$ отъ $5\,^{1}/_{3}=$ $=5\,^{1}/_{3}.\,^{3}/_{4}=4$ и т. под. Такимъ образомъ, *всѣ тѣ задачи, въ которыхъ нужно взять одну или нѣсколько частей какого-нибудь чис-*

ла рѣшаются посредствомъ умноженія на дробь; напр. если 1 арш. матеріи стоитъ $^3/_4$ руб., то, чтобъ узнать, сколько стоитъ $^8/_9$ арш., должно $^3/_4$ руб. умножить на $^8/_9$; получимъ $^2/_3$ руб. Если въ одномъ кускѣ металла $2^3/_5$ пуда вѣсу, а вѣсъ другого составляетъ $^5/_8$ перваго, то, чтобъ узнать, сколько въ немъ вѣсу, должно $2^3/_5$ пуда умножить на $^5/_8$, и т. под.

198. Возьмемъ какое-нибудь число, напр. 6, и умножимъ его на цѣлое число, напр. на 3 — получимъ 18; умноживъ 6 на $^3/_2$, получимъ $^{18}/_2=9$; такъ какъ 18 и 9 больше 6, то отъ умноженія на цѣлое число или на неправильную дробь число 6 увеличилось. Если же умножить 6 на $^2/_3$, то получимъ $^{12}/_3=4$; слѣд., отъ умноженія на правильную дробь $^2/_3$ число 6 уменьшилось; дѣйствительно, умножить число на $^2/_3$ значитъ взять только двѣ третьихъ доли его; слѣд. отъ умноженія на $^2/_3$ число должно уменьшиться. Итакъ, *число отъ умноженія увеличивается тогда, когда его умножаютъ на цѣлое число или на дробь, большую единицы; отъ умноженія же на правильную дробь число уменьшается.*

Напр. $^3/_8 \cdot 5=^{15}/_8$; $^{15}/_8>^3/_8$; $^3/_8 \cdot ^5/_3=^5/_8$; $^5/_8>^3/_8$; $^3/_8 \cdot ^2/_3=^1/_4$; $^1/_4<^3/_8$.

199. Вопросы. 1) Сколько случаевъ при умноженіи дробей и какіе они? 2) Какъ умножить дробь на цѣлое число? цѣлое на дробь? дробь на дробь? 3) Какъ сдѣлать умноженіе въ томъ случаѣ, если одинъ или оба производителя будутъ цѣлыя числа съ дробями? 4) Какъ поступать при умноженіи дробныхъ имен. чиселъ? 5) Что значитъ умножить на дробь? 6) Какія задачи рѣшаются посредствомъ умноженія на дробь? 7) Когда число отъ умноженія увеличивается? когда уменьшается? 8) Составить задачу, которая рѣшалась бы посредствомъ умноженія дроби на цѣлое число? цѣлаго на дробь? дроби на дробь? 9) Составить задачу, которая рѣшалась бы умноженіемъ $^3/_8$ фун. на 4? 2 фун. на $^5/_8$? $^3/_5$ фун. на $^5/_8$? 10) Что больше $3 \cdot ^3/_2$, 3 или $3 \cdot ^2/_3$?

200. Дѣленіе дробей. При дѣленіи дробей могутъ быть акіе же случаи, какъ и при умноженіи.

1) *Раздѣлить дробь на цѣлое число.* Положимъ, что надо раздѣлить $^4/_5$ на 2; это значитъ $^4/_5$ уменьшить въ два раза; а для этого должно числит. раздѣлить на 2 или знамен. умножить на два; получимъ $^4/_5 : 2=^2/_5=^4/_{10}$.

Итакъ, *чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, должно числителя раздѣлить или знаменателя помножить на это число.*

Напр. $^8/_{15} : 4=^2/_{15}$; $^{21}/_{40} : 7=^3/_{40}$; $^2/_7 : 8=^2/_{56}=^1/_{28}$.

2) *Раздѣлить цѣлое число на дробь.* Положимъ, что надо 2 раздѣлить на $^3/_4$. Раздѣлить 2 на $^3/_4$ значитъ найти такое число, которое, если мы умножимъ на $^3/_4$. то получимъ въ произведеніи 2; назовемъ это число x. Но мы видѣли, что умножить число на $^3/_4$ значитъ взять три четверти его; поэтому $^3/_4 x=2$; слѣд. $^1/_4 x$ будетъ въ 3 раза меньше 2-хъ; т. е. $^1/_4 x=^2/_3$; а $^4/_4 x$ будутъ въ 4 раз-

больше $\frac{1}{4}x$, т. е. $\frac{4}{4}x=x=\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{8}{3}$. Итакъ, *чтобы раздѣлить цѣлое число на дробь, должно цѣлое умножить на знаменателя и произведеніе раздѣлить на числителя.* Напр. $4 : \frac{7}{9}=\frac{36}{7}=5\frac{1}{7}$; $10 : \frac{5}{6}=\frac{60}{5}=12$, и т. под. Замѣтимъ, что если цѣлое число дѣлится безъ остатка па числителя, то лучше прежде сдѣлать дѣленіе, а потомъ умноженіе; напр. $40 : \frac{2}{17}$; раздѣливъ 40 на 2 и умноживъ частное 20 на знаменателя 17, найдемъ 340.

Такъ какъ $5 : \frac{3}{8}=\frac{40}{3}$ и $5\cdot\frac{8}{3}=\frac{40}{3}$; $4 : \frac{2}{5}=10$ и $4\cdot\frac{5}{2}=10$, то слѣд., раздѣлить 5 на $\frac{3}{8}$ все равно, что помножить 5 на $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{3}$ состоитъ изъ тѣхъ же чиселъ, какъ и $\frac{3}{8}$, только написанныхъ наоборотъ, то есть числитель на мѣстѣ знаменателя и обратно; поэтому $\frac{8}{3}$ наз. *обращенной дробью* $\frac{3}{8}$, и раздѣлить цѣлое число на дробь все равно, что помножить его на обращенную дробь; слѣд. можно сказать, что *при дѣленіи цѣлаго числа на дробь должно дѣлимое помножить на обращеннаго дѣлителя.*

3) *Раздѣлить дробь на дробь*, напр. $\frac{5}{7} : \frac{9}{11}$. Означивъ искомое частное черезъ x, будемъ имѣть $\frac{9}{11}x=\frac{5}{7}$; $\frac{1}{11}x=\frac{5}{7} : 9=\frac{5}{7\cdot 9}$;

$$x=\frac{5}{7\cdot 9}\cdot 11=\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9};$$ слѣд. $\frac{5}{7} : \frac{9}{11}=\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}$. Итакъ, *чтобы раздѣлить дробь на дробь, должно числителя первой дроби умножить на знаменателя второй, а числителя второй на знаменателя первой и первое произведеніе раздѣлить на второе*, или иначе — *должно дѣлимое помножить на обращеннаго дѣлителя.* Напр. $\frac{3}{8} : \frac{4}{5}=\frac{15}{32}$; $\frac{5}{18} : \frac{25}{54}=\frac{5\cdot 54}{18\cdot 25}=\frac{3}{5}$, и т. под.

4) *Если при дробяхъ будутъ цѣлыя числа, то должно цѣлыя числа съ дробями обратить въ неправильныя дроби и потомъ поступать по предыдущимъ правиламъ.* Напр. $2\frac{3}{8} : 4=\frac{19}{8} : 4=\frac{19}{32}$; $3 : 2\frac{2}{3}=3 : \frac{8}{3}=1\frac{1}{8}$; $5\frac{5}{8} : 2\frac{13}{16}=\frac{45}{8} : \frac{45}{16}=2$, и т. под.

При дѣленіи дробей лучше сначала только обозначить дѣйствія, не производя ихъ на самомъ дѣлѣ, и потомъ сдѣлать возможныя сокращенія. Напр. $\frac{17}{30} : 1\frac{2}{15}=\frac{17}{30} : \frac{17}{15}=\frac{17\cdot 15}{30\cdot 17}=\frac{1}{2}$.

Если числитель и знаменатель дѣлимаго будутъ кратными членовъ дѣлителя, то дѣленіе можно произвести проще: именно нужно раздѣлить числителя на числителя, а знаменателя на знаменателя; напр. $\frac{15}{8} : \frac{3}{4}=\frac{5}{2}$; $\frac{28}{39} : \frac{14}{13}=\frac{2}{3}$; $\frac{6}{8} : \frac{3}{4}=\frac{2}{2}$, и т. под. Причину этого учащіеся найдутъ сами, соображая обыкновенное правило дѣленія дробей съ тѣмъ, что было сказано объ увеличеніи и уменьшеніи дробей.

201. Правила для дѣленія цѣлаго числа на дробь и дроби на дробь можно вывести еще слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что дано 4 раздѣлить на $\frac{5}{8}$; раздѣлимъ сначала 4 на 5 — получимъ $\frac{4}{5}$, но это

частное не вѣрно, потому что дано было раздѣлить 4 на $\frac{5}{8}$, а мы раздѣлили 4 на цѣлое число 5; слѣд. дѣлителя мы увеличили въ 8 разъ, отчего частное уменьшилось въ 8 разъ, и, чтобъ исправить ошибку, должно найденное частное $\frac{4}{5}$ умножить на 8; получимъ $\frac{32}{5}$.

Если бы дано было $\frac{4}{7}$ раздѣлить на $\frac{5}{9}$, то, раздѣливъ $\frac{4}{7}$ на 5, получили бы частное $\frac{4}{35}$, которое въ 9 разъ меньше истиннаго; слѣд. истинное частное$=\frac{4}{35}\cdot 9=\frac{36}{35}$.

Примѣры. 1) Раздѣлить $(8\frac{7}{12}-7\frac{11}{15})\cdot 1\frac{3}{17}$ на $3\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}$?
$8\frac{7}{12}-7\frac{11}{15}=8\frac{35}{60}-7\frac{44}{60}=\frac{51}{60}=\frac{17}{20}$; $\frac{17}{20}\cdot 1\frac{3}{17}=\frac{17}{20}\cdot\frac{20}{17}=1$;
$3\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$; искомое частное$=1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

2) Вычислить выраженіе $\dfrac{3\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{80}}$?

Сумма $3\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}=5\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}-\frac{1}{80}=\frac{7}{80}$; выраженіе$=5\frac{1}{4}:\frac{7}{80}=$
$=\frac{21}{4}:\frac{7}{80}=60$.

3) Сумма трехъ чиселъ$=69$; первое въ $3\frac{1}{3}$ разъ больше второго; а второе въ $2\frac{1}{2}$ раза больше третьяго; найти эти числа? Третье число содержится въ 69 и $1+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{2}=1+\frac{5}{2}+8=$
$=\frac{23}{2}$ разъ, и слѣд. оно$=69:\frac{23}{2}=6$; 2-е$=6\cdot 2\frac{1}{2}=15$; 1-е$=48$.

202. Дѣленіе дробныхъ именованныхъ чиселъ. При дѣленіи дробныхъ именованныхъ чиселъ могутъ быть два случая.

1) *Если дѣлитель число отвлеченное*; напр. 20 саж. $2\frac{1}{2}$ арш. раздѣлить на $1\frac{2}{5}$. Обративъ дѣлимое въ одно наименованіе, напр. въ аршины, получимъ $62\frac{1}{2}$ арш.; $62\frac{1}{2}$ арш. $:1\frac{2}{5}=$
$=\frac{125}{2}$ арш. $:\frac{7}{5}=\frac{625}{14}$ арш.$=44\frac{9}{14}$ арш.$=14$ саж. $2\frac{9}{14}$ арш.; въ этомъ случаѣ *частное однородно съ дѣлимымъ*.

2) *Если дѣлимое и дѣлитель числа однородныя*, то нужно обратить ихъ въ одно наименованіе и дѣлить какъ простыя числа; въ частномъ получится *отвлеченное число*, показывающее, *во сколько разъ* дѣлимое больше или меньше дѣлителя.

Примѣры. 1) 13 саж. $\frac{3}{4}$ арш. 7 верш. раздѣлить на $3\frac{1}{2}$ саж. $2\frac{3}{4}$ арш. $2\frac{1}{3}$ вершка?

Раздробивъ дѣлимое и дѣлителя въ вершки, получимъ:
13 саж. $\frac{3}{4}$ арш. 7 вер.$=643$ вер.; а $3\frac{1}{2}$ саж. $2\frac{3}{4}$ арш. $2\frac{1}{3}$ вер. $=214\frac{1}{3}$ вер.; $643:214\frac{1}{3}=643:\frac{643}{3}=3$.

2) 7 пуд. 23 фун. 8 лот. $1\frac{1}{2}$ зол. раздѣлить на 5?

Не обращая дѣлимаго въ одно наименованіе, будемъ дѣлить на 5 постепенно каждый разрядъ мѣръ, начиная съ высшихъ. Раздѣливъ 7 пуд. на 5, получаемъ 1 пудъ въ частномъ и 2 пуда въ остаткѣ; 2 пуда$=80$ фун.; 80 ф.$+23$ ф.$=103$ ф.; раздѣливъ 103 ф. на 5, получимъ въ частномъ 20 ф. и въ остаткѣ 3 ф.; 3 ф.$=96$ лот.; 96 л.$+8$ л.$=104$ л.; раздѣливъ 104 л. на 5, получимъ въ частномъ 20 л., а въ остаткѣ 4 л.; 4 л.$=12$ зол.; 12 з.$+1\frac{1}{2}$ з.$=$
$=13\frac{1}{2}$ *зол.*; $13\frac{1}{2}:5=\frac{27}{2}:5=\frac{27}{10}=2\frac{7}{10}$ зол. Итакъ частное$=1$ п. 20 ф. 20 л. $2\frac{7}{10}$ зол.

Если бы дѣлимое раздробили въ золотники, то получили бы $29113^1/_2$ зол.; раздѣливъ это число на 5 и превративъ частное $^{58227}/_{10}$ зол. въ мѣры высшаго названія, получимъ 1 п. 20 ф. 20 л. $2^7/_{10}$ зол., т. е. тотъ же результатъ, какой мы нашли и прежде.

3) Одинъ локомотивъ прошелъ 34 верс. 438 саж. $1^1/_5$ арш. въ 1 часъ 9 мин. 12 сек.; а другой прошелъ $2227^1/_2$ метр. въ $12^3/_8$ мин.; во сколько разъ 1-й двигался скорѣе? Метръ=$1^2/_5$ арш.

Опредѣлимъ, сколько арш. проходилъ первый локомотивъ въ 1 секунду; для этого раздѣлимъ 34 верс. 438 с. $1^1/_5$ ар., или $52315^1/_5$ арш., на число секундъ, заключающихся въ 1 час. 9 мин. 12 сек., т. е. на 4152; получимъ $52315^1/_5 : 4152 = ^{261576}/_5 : 4152 = ^{63}/_5 = 12^3/_5$ арш. Второй локомотивъ проходилъ въ секунду $2227^1/_2$ метр.$: ^{1485}/_2 = ^{4455}/_2 : ^{1485}/_2 = ^{4455}/_{1485} = 3$ мет.$= 3 . 1^2/_5 = ^{21}/_5$ арш.

Итакъ первый двигался скорѣе второго въ $12^3/_5 : ^{21}/_5 = ^{63}/_{21} = 3$ раза.

4) Сколько можно вылить пушекъ изъ 1001 пуд. $^3/_4$ фун. мѣди, если въ каждой должно быть 62 пуда 22 фун. $17^1/_2$ лот.?

Обратимъ данныя числа въ лоты и полученныя числа раздѣлимъ одно на другое; 1001 п. $^3/_4$ ф.=1281304 л.; дѣлитель=$80018^1/_2$ л.; $1281304 : 80081^1/_2 = 1281304 : ^{160163}/_2 = 16$.

203. Мы знаемъ, что раздѣлить 2 на $^3/_4$ значитъ найти такое число, котораго три четверти составляютъ 2 единицы; дѣля $^3/_8$ на $^{51}/_2$, находимъ такое число, котораго $^{51}/_2$ составляютъ три восьмыхъ доли единицы, и т. под.; слѣд., *всѣ тѣ задачи, въ которыхъ требуется найти число, когда извѣстна какая-нибудь его часть, рѣшаются посредствомъ дѣленія на дробь*; если напр. нужно найти число, котораго $^3/_7$ составляютъ 30 единицъ, то должно 30 раздѣлить на $^3/_7$. Точно также, если за $^3/_4$ арш. сукна заплачено $1^7/_8$ руб., то, чтобъ узнать, сколько стоитъ 1 арш., должно $1^7/_8$ раздѣлить на $^3/_4$—получимъ $2^1/_2$ руб.; если работникъ сдѣлалъ $^3/_4$ работы въ 6 часовъ, то всю работу онъ сдѣлаетъ въ $6 : ^3/_4 = 8$ часовъ, и т. под.

204. Возьмемъ какое-нибудь число, напр., 12, и раздѣлимъ его сперва на 4, потомъ на $^4/_3$, потомъ на $^4/_7$; получимъ $12 : 4 = 3$; $12 : ^4/_3 = 9$; $12 : ^4/_7 = 21$. Такъ какъ $3 < 12$, $9 < 12$, а $21 > 12$, то *число отъ дѣленія уменьшается только тогда, когда дѣлитель будетъ цѣлое число или дробь, большая единицы; если же раздѣлить число на правильную дробь, то оно отъ дѣленія увеличится*. Такимъ образомъ мы видимъ, что умножить не всегда значитъ *увеличить* и раздѣлить не всегда значитъ *уменьшить*.

205. Вопросы. 1) Сколько случаевъ при дѣленіи дробей и какіе они? 2) Какъ раздѣлить дробь на цѣлое число? цѣлое на дробь? дробь на дробь? 3) Какъ поступать, если дѣлимое, или дѣлитель, или оба вмѣстѣ будутъ цѣлыя числа съ дробями? 4) Нельзя ли при дѣленіи дроби на дробь дѣлить числит. на числит., а знаменат. на знаменат., и если можно, то въ какомъ случаѣ и почему? 5) Сколько

случаевъ бываетъ при дѣленіи дробныхъ имеов. чиселъ и какіе они? 6) Что значитъ раздѣлить число на дробь? 7) Какія задачи рѣшаются посредствомъ дѣленія на дробь? 8) Когда число отъ дѣленія уменьшается и когда увеличивается? 9) Составить задачу, которая рѣшалась бы посредствомъ дѣленія дроби на цѣлое число? цѣлаго на дробь? дроби на дробь? 10) Составить задачу, которая рѣшалась бы дѣленіемъ $1^3/_4$ фунта на $^3/_5$? дѣленіемъ $1^3/_4$ фун. на 2? дѣленіемъ $1^3/_4$ фун. на $^7/_{20}$ фун.?

ГЛАВА VI.

ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ.

206. Нумерація десятичныхъ дробей. *Десятичными дробями наз. такія, у которыхъ знаменателемъ служитъ 10, 100, 1000..., вообще единица съ однимъ или нѣсколькими нулями;* напр. $^3/_{10}$, $^{27}/_{100}$, $^{105}/_{10000}$ будутъ дроби десятичныя. Если раздѣлимъ единицу на десять равныхъ частей, то получимъ десятыя доли; раздѣливъ десятую долю на 10 частей, получимъ сотыя; если сотую долю раздѣлить на 10 частей, то каждая часть будетъ $^1/_{1000}$ единицы, и т. д., такъ что каждый разрядъ долей больше слѣдующаго разряда въ 10 разъ, отчего и самыя доли наз. *десятичными.* Десятичныя дроби имѣютъ то преимущество передъ *простыми* или обыкновенными дробями, что ихъ можно писать безъ знаменателя, отчего всѣ дѣйствія съ ними упрощаются.

Напишемъ сряду нѣсколько одинакихъ цыфръ, напр. 5555; эти цыфры имѣютъ различное значеніе, смотря по мѣстамъ, которыя онѣ занимаютъ: первая цыфра съ правой руки означаетъ 5 единицъ; вторая 5 десятковъ; третья 5 сотенъ и т. д.; вообще, каждая цыфра, стоящая съ лѣвой стороны другой, означаетъ въ 10 разъ больше этой послѣдней; и наоборотъ — каждая цыфра, стоящая съ правой стороны, имѣетъ значеніе, въ десять разъ меньшее предыдущей цыфры. Поэтому, если мы послѣ числа 5555 поставимъ какой-нибудь особый знакъ, напр. *запятую*, и напишемъ еще нѣсколько разъ цыфру 5, то первая цыфра, стоящая подлѣ запятой съ правой стороны, будетъ означать число, въ десять разъ меньшее 5 единицъ, т. е. 5 десятыхъ долей единицы, вторая 5 сотыхъ, третья 5 тысячныхъ и т. д., такъ что число

$$5555,5555=5555+^5/_{10}+^5/_{100}+^5/_{1000}+^5/_{10000}.$$

Такимъ образомъ, *чтобы писать десятичныя дроби безъ знаменателя, условились цѣлое число отдѣлять отъ дроби запятой; а если цѣлаго нѣтъ, то ставить нуль и послѣ него запятую; на первомъ мѣстѣ послѣ запятой съ правой руки ставить де-*

сятыя доли, на второмъ сотыя, на третьемъ тысячныя и т. д.; а если какихъ нибудь долей нѣтъ, то вмѣсто нихъ ставить нули. Напр., чтобы написать 3 цѣлыхъ 5 десятыхъ 8 сотыхъ 4 десятитысячныхъ 7 милліонныхъ, нужно написать 3 и поставить запятую, потомъ писать 5, затѣмъ 8; такъ какъ тысячныхъ долей нѣтъ, то на третьемъ мѣстѣ поставить нуль, послѣ него 4 десятитысячныхъ; такъ какъ стотысячныхъ долей нѣтъ. то на пятомъ мѣстѣ послѣ запятой поставить опять нуль и послѣ него цыфру 7, такъ что выйдетъ 3,580407. Подобнымъ образомъ $2+{}^{3}/_{10}+{}^{4}/_{100}+{}^{8}/_{1000}=2,348$; $1+{}^{4}/_{10}+{}^{1}/_{1000}=1,401$; ${}^{2}/_{100}+{}^{3}/_{10000}=0,0203$; ${}^{4}/_{1000}=0,004$ и т. под.

207. Выговорить десятичную дробь, написанную безъ знаменателя, очень легко. Положимъ, напр., что имѣемъ 2,308602; число это содержитъ 2 цѣлыхъ единицы, 3 десятыхъ доли, 8 тысячныхъ, 6 десятитысячныхъ, 2 милліонныхъ; а сотыхъ и стотысячныхъ нѣтъ; поэтому его нужно прочитать такъ: 2 цѣлыхъ 3 десятыхъ 8 тысячныхъ 6 десятитысячныхъ, 3 стотысячныхъ.

Подобнымъ образомъ 0,30263 содержитъ 3 десятыхъ, 2 тысячныхъ, 6 десятитысячныхъ, 3 стотысячныхъ.

$0,02305={}^{2}/_{100}+{}^{3}/_{1000}+{}^{5}/_{100000}$; $1,002=1+{}^{2}/_{1000}$, и т. п.

Такимъ образомъ, *чтобы прочитать десятичную дробь, написанную безъ знаменателя, нужно прочитать цѣлое число, потомъ читать послѣдовательно цыфру за цыфрой съ лѣвой руки, придавая каждой цыфрѣ то значеніе, которое она имѣетъ по занимаемому ею мѣсту.*

Можно выговаривать десятичныя дроби еще иначе. Возьмемъ напр. 0,4926; эта дробь $={}^{4}/_{10}+{}^{9}/_{100}+{}^{2}/_{1000}+{}^{6}/_{10000}$; но, приведя всѣ эти дроби къ одному знаменателю 10000 и сдѣлавъ сложеніе, получимъ ${}^{4926}/_{10000}$. Итакъ, $0,4926={}^{4926}/_{10000}$. Подобнымъ образомъ $3,03025=3^{3025}/_{100000}$; 0,03002 нужно прочесть: 3002 стотысячныхъ; 1,2034—одна цѣлая, 2034 десятитысячныхъ; 0,000102—102 милліонныхъ, и т. под. Слѣд., *чтобы выговорить десятичную дробь, написанную безъ знаменателя, должно прочитать сперва цѣлое число, потомъ прочитать всего числителя такъ, какъ читаютъ цѣлыя числа, и прибавить значеніе только послѣдней цыфры его*; такъ 0,0203609 будетъ двѣсти три тысячи шестьсотъ девять *десятимилліонныхъ.*

Если при десятичной дроби будетъ цѣлое число, напр. 3,507 или 42,74 и т. под., то такую дробь можно прочитать еще иначе, чѣмъ какъ показано выше. Дѣйствительно, $3,507=3^{507}/_{1000}={}^{3507}/_{1000}$; $42,74=42^{74}/_{100}={}^{4274}/_{100}$; поэтому, чтобы прочитать напр. 17,038, нужно прочитать это число, не обращая вниманія на запятую, какъ будто бы оно было цѣлымъ, и прибавить значеніе только послѣдней цыфры, т. е. будетъ семнадцать тысячъ тридцать восемь *тысячныхъ.*

208. Мы уже видѣли, какъ написать безъ знаменателя десятичную дробь, если ее будутъ диктовать, произнося разряды одинъ за другимъ по порядку; напр., пуль цѣлыхъ 5 десятыхъ 3 тысячныхъ 4 милліонвыхъ должно написать 0,503004.

Посмотримъ теперь, какъ написать безъ знаменателя десятичную дробь, которая или написана съ знаменателемъ, напр. $^{8026}/_{100000}$, или которую диктуютъ, произнося сразу ея числителя, папр. 7035 десятитысячныхъ. Для этого замѣтимъ, что сколько съ правой руки послѣ запятой цыфръ, столько же въ подразумѣваемомъ знаменателѣ нулей; напр. въ числѣ 35,605 послѣ запятой три цыфры, и въ подразумѣваемомъ знаменателѣ (1000) три нуля; въ дроби 0,0020704 послѣ запятой семь цыфръ, и знаменателемъ служитъ 1 съ семью нулями, и т. под. Поэтому и наоборотъ, сколько нулей въ знаменателѣ той дроби, которую мы хотимъ написать, столько цыфръ должно быть послѣ запятой.

Положимъ теперь, что хотимъ написать 7035 десятитысячныхъ. Такъ какъ знаменатель этой дроби (10000) содержитъ 4 нуля, то послѣ запятой должно быть 4 цыфры; поэтому напишемъ число 7035 и отдѣлимъ запятой отъ правой руки къ лѣвой 4 цыфры, получимъ: ,7035; такъ какъ цѣлыхъ нѣтъ, то ставимъ нуль; выйдетъ 0,7035.

Чтобы написать 3 цѣлыхъ 2709 милліонвыхъ, пишемъ 2709, и такъ какъ въ знаменателѣ 6 нулей, то должно въ этомъ числѣ занятою отдѣлить шесть цыфръ отъ правой руки; но въ числѣ только 4 цыфры, потому нужно прибавить слѣва два нуля; получвмъ: ,002709 и наконецъ пишемъ 3 цѣлыхъ; будетъ 3,002709.

Чтобы написать 23785 тысячныхъ, пишемъ 23785; потомъ отъ правой руки отдѣляемъ запятой 3 цыфры; получимъ 23,785.

Точно также $3^{75}/_{1000}=3,075$; $^{17}/_{100000}=0,00017$; $^{1529}/_{100}=15,29$, и т. п.

Вообще, *чтобы написать десятичную дробь безъ знаменателя, должно написать ея числителя и отдѣлить занятою отъ правой руки къ лѣвой столько цыфръ, сколько нулей въ знамен.; если при этомъ въ числителѣ цыфръ не достаётъ, то на мѣсто ихъ нужно приписать съ лѣвой руки нули.*

209. Сравненіе величины десятичныхъ дробей. Если имѣемъ нѣсколько десятичныхъ дробей, то съ перваго взгляда видно, какая изъ нихъ больше и какая меньше. Возьмемъ напр. дроби 0,395; 0,8 и 0,00837; очевидно, что вторая дробь больше другихъ, потому что въ ней десятыхъ долей 8, тогда какъ въ первой ихъ только 3, а въ третьей нѣтъ ни одной десятой; третья дробь и будетъ наименьшая. Итакъ, *чтобъ узнать, какая изъ десятичныхъ дробей больше, должно смотрѣть на десятыя доли; а если число ихъ во всѣхъ дробяхъ одинаково, то на сотыя; если и сотыхъ одно и то же число, то на тысячныя, и т. д.*

Такъ напр. изъ дробей 0,83; 0,873 и 0,86984 наибольшая будетъ вторая, наименьшая первая.

210. Увеличеніе и уменьшеніе десятичныхъ дробей въ 10, 100, 1000 и т. д. разъ. Возьмемъ число 3,7648 и переставимъ запятую вправо черезъ *одну* цыфру; получимъ 37,648. Это число больше 3,7648 въ 10 разъ, потому что въ числѣ 3,7648 цыфра 3 означала единицы, а теперь стало 3 десятка; цыфра 7 означала десятыя доли, а теперь стало 7 цѣлыхъ единицъ; 6 было сотыхъ, а теперь 6 десятыхъ; 4 тысячныхъ обратились въ 4 сотыхъ; 8 десятитысячныхъ въ 8 тысячныхъ; т. е. значеніе каждой цыфры числа увеличилось въ 10 разъ, а потому и самое число увеличилось въ 10 разъ.

Перенося въ томъ же числѣ 3,7648 запятую вправо черезъ двѣ, 3, 4 цыфры, получаямъ числа 376,48; 3764,8 и 37648, которыя больше 3,7648 въ 100, 1000, 10000 разъ. Итакъ, *чтобъ увеличить десятичную дробь въ 10, 100, 1000 и т. д. разъ, должно перенести запятую вправо черезъ одну, двѣ, три и т. д. цыфры;* напр., чтобы 0,035 увеличить въ 100000 разъ, должно перенести запятую вправо черезъ 5 цыфръ; но въ данной дроби только 3 цыфры, поэтому должно прибавить 2 нуля; получимъ 003500, т. е. 3500 цѣлыхъ; это число болѣе 0,035 въ 100000 разъ.

Если въ числѣ 37,643 перенесемъ запятую влѣво черезъ одну, двѣ, три... цыфры, то получимъ числа 3,7648; 0,37648; 0,037648; 0,0037648 и т. д. Сравнивъ значеніе цыфръ въ этихъ числахъ и въ данномъ числѣ 37,648, найдемъ, что 3,7648 въ 10 разѣ менѣе даннаго; 0,37648 въ 1000 разъ менѣе его, и т. д.

Поэтому, *чтобъ уменьшить десятичную дробь въ 10, 100. 1000 и т. д. разъ, должно перенести запятую влѣво черезъ одну, двѣ, три... цыфры; если же цыфръ не достанетъ, то ставить нули.* Напр., чтобъ уменьшить 23,65 въ 100000 разъ, переносимъ запятую черезъ пять цыфръ влѣво, добавивъ съ лѣвой руки три нуля, и получимъ 0,0002365.

Такъ же можно уменьшать и цѣлыя числа въ 10, 1000 и т. д. разъ. Напр., если 25 уменьшить въ 10 разъ, то получимъ 2,5; 367 уменьшить въ 100000 разъ, получимъ 0,00367.

Возьмемъ дробь 0,3578 и отбросимъ въ ней запятую; получимъ 3578 цѣлыхъ; слѣд., дробь увеличилась въ 10000 разъ. Итакъ, *отбросить запятую въ десятичной дроби значить увеличить дробь во столько разъ, какъ великъ былъ ея знаменатель.*

211. Приведеніе къ одному знаменателю. Возьмемъ дробь 0,54 и припишемъ къ ней съ правой руки нуль; получимъ 0,540. Что сдѣлалось съ дробью? Числитель ея былъ 54, а теперь сталъ 540, то есть числит. увеличился въ 10 разъ; но зато прежде мы имѣли 54 *сотыхъ*, а теперь имѣемъ 540 *тысячныхъ*; слѣд., и знамен. увеличился въ 10 разъ; а потому дробь не измѣнилась.

Итакъ, *если къ десятичной дроби приписать съ правой руки одинъ или нѣсколько нулей, то величина ея не измѣнится.*

На этомъ свойствѣ основывается чрезвычайно простой способъ приведенія десятичныхъ дробей къ одному знаменателю.

Возьмемъ напр. 0,3; 0,0005; 1,75; 3,79086.

Чтобы привести десятичныя дроби къ одному знаменателю, должно только уравнять число десятичныхъ знаковъ нулями съ правой стороны, т. е. къ первой дроби должно приписать четыре нуля, ко 2-й одинъ, къ 3-й три нуля; четвертую дробь оставить безъ перемѣны; получимъ 0,30000; 0,00050; 1,75000; 3,79086. Теперь всѣ дроби имѣютъ одного знамен. 100000.

Если отъ *приписыванія* нулей съ правой стороны величина десятичной дроби не измѣняется, то, очевидно, можно также и *отбрасывать* нули, стоящіе съ правой стороны; такъ вмѣсто 0,36000 можно взять 0,36; вмѣсто 0,30 — 0,3 и т. под.; такимъ образомъ дѣлается *сокращеніе* десятичныхъ дробей.

212. Вопросы. 1) Какія дроби наз. десятичными? 2) Въ чемъ состоитъ преимущество ихъ передъ простыми? 3) Какое условіе сдѣлано для того, чтобы писать десят. дроби безъ знамен.? 4) Какъ прочитать десят. дробь, написанную безъ знамен.? 5) Какъ написать десят. дробь безъ знамен.? 6) Какъ узнать, какая изъ данныхъ десят. дробей больше и какая меньше? 7) Какъ увеличить десят. дробь въ 10, 100..... разъ? 8) Какъ уменьшить десят. дробь въ 10, 100, 1000.... разъ? 9) Что сдѣлается съ десят. дробью, если отбросить запятую? 10) Что сдѣлается съ десят. дробью, если приписать къ ней съ правой руки одинъ или нѣсколько нулей? 11) Какъ привести десят. дроби къ одному знамен.?

213. Сложеніе и вычитаніе. *Чтобы сложить или вычесть десятичныя дроби, должно уравнять число десятичныхъ цыфръ нулями съ правой руки, подписать данныя числа одно подъ другимъ такъ, чтобы цѣлыя были подъ цѣлыми, десятыя подъ десятыми, сотыя подъ сотыми и т. д., потомъ складывать или вычитать какъ цѣлыя числа и въ результатѣ поставить запятую на прежнемъ мѣстѣ.* Вотъ примѣры:

1) 0,35+2,009+11,7486=14,1076.

$$\begin{array}{r} 0,3500 \\ +\ \ 2,0090 \\ 11,7486 \\ \hline 14,1076 \end{array}$$

2) 12,034—10,83 = 1,204.

$$\begin{array}{r} 12,034 \\ -\ 10,830 \\ \hline 1,204 \end{array}$$

3) 2,3—1,764=2,300—1,764=0,536.

Точно также вычитается дробь изъ цѣлаго числа; напр. 3—0,68=3,00—0,68=2,32; 1—0,69=1,00—0,69=0,31.

Замѣтимъ, что при сложеніи можно и не уравнивать число десятичныхъ цыфръ нулями, а только складывать одинакія доли, то есть десятыя съ десятыми, сотыя съ сотыми и т. д.

214. Умноженіе. Положимъ, что надо 2,075 умножить на 0,34. Отбросимъ запятыя во множимомъ и множителѣ и умножимъ 2075 на 34; получимъ 70550. Но, отбросивъ запятую во множимомъ, мы увеличили его въ 1000 разъ; во столько же разъ увеличилось и произведеніе, а отбросивъ занятую во множителѣ, мы увеличили его во 100 разъ, вслѣдствіе чего произведеніе, увеличенное уже въ 1000 разъ, увеличилось еще въ 100 разъ, т. е. сдѣлалось въ 100000 разъ болѣе истиннаго; чтобы получить вѣрный результатъ, должно полученное произведеніе 70550 уменьшить въ 100000 разъ, т. е. отдѣлить занятою отъ правой руки 5 цыфръ; получимъ 2,075.0,34=0,7055. *Итакъ, при умноженіи десятичныхъ дробей должно отбросить запятыя и помножить какъ цѣлыя числа, а въ полученномъ произведеніи отдѣлить отъ правой руки столько цыфръ, сколько было десятичныхъ знаковъ во множимомъ и множителѣ.* Напр. 0,0064.25=0,16; 0,364.0,02=0,00728, и т. под.

215. Дѣленіе. При дѣленіи десят. дробей бываютъ два случая: 1-й случай. *Когда дѣлитель будетъ цѣлое число.* Положимъ, напр., что дано 3,285 : 5. Будемъ разсуждать такъ: 5 въ 3 цѣлыхъ не содержится; поэтому въ частномъ цѣлаго числа не будетъ—пишемъ 0 цѣлыхъ; раздробимъ 3 цѣлыхъ въ десятыя доли; единица содержитъ 10 десятыхъ, слѣд. 3 содержатъ 30 десятыхъ, да еще 2 десятыхъ, слѣд. всего 32; дѣля 32 десятыхъ на 5, получимъ въ частномъ 6 десятыхъ и въ остаткѣ 2 десятыхъ; раздробивши 2 десятыхъ въ сотыя и придавши 8 сотыхъ, получимъ 28 сотыхъ, которыя по раздѣленіи на 5 дадутъ въ частномъ 5 и въ остаткѣ 3 сотыхъ; наконецъ, 3 сотыхъ и 5 тысячныхъ составятъ 35 тысячныхъ; раздѣливъ на 5, получимъ 7 тысячныхъ безъ остатка. Итакъ 3,285 : 5=0,657.

```
3,285|5
  28 |0,657
   35
    0
```

Примѣры. 1) 38,064 : 8=4,758; 2) 0,0729 : 81=0,0009.

Положимъ еще, что дано 5,24 : 16. Поступая такъ какъ показано, получимъ въ частномъ 0,32 и въ остаткѣ 12 сотыхъ; этотъ остатокъ обратимъ въ тысячныя и раздѣлимъ на 16; найдемъ въ частномъ 8 и въ остаткѣ 8 тысячныхъ; обративъ ихъ въ десятитысячныя, получимъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 0.

Такимъ образомъ 5,24 : 16=0,3275. Также 0,3 : 4=0,075 и т. п.

Въ этихъ примѣрахъ дѣленіе окончилось; но бываютъ случаи, когда оно не окончится, сколько бы мы ни продолжали его.

Такъ напр. дѣля 0,32 на 7, получимъ въ частномъ 0,045714....

```
 0, 32 |7
 ------|--------
    40 |0, 045714...
   ----
    50
   ---
     10
    ---
      30
      -
       2
```

Точки (....) здѣсь показываютъ, что дѣленіе не окончилось; и такъ какъ въ остаткѣ у насъ 2 милліонныхъ, то, чтобы получить истинное частное отъ дѣленія 0,32 на 7, должно къ найденному нами частному 0,045714 придать еще частное отъ дѣленія $^1/_{1000000}$ на 7, т. е. $^2/_{7000000}$, или $^1/_{3500000}$, такъ что 0,32 : 7=0,045714+$^1/_{3500000}$; но обыкновенно остатокъ отбрасывается. Не должно впрочемъ забывать, что если мы напишемъ 0,32 : 7=0,045714, то это частное будетъ не вѣрное, а только *приближенное*, и тѣмъ ближе къ истинному, чѣмъ дальше мы будемъ продолжать дѣленіе. До какихъ поръ продолжать дѣленіе—это совершенно зависитъ отъ насъ; мы могли бы написать:

0,32 7=0,04...; 0,32 : 7=0,045...; 0,32 : 7=0,0457....

Если мы положимъ 0,32 7=0,04, то сдѣлаемъ ошибку на 0,005714...; слѣд. 0,04 есть такое приближенное частное, которое отъ истиннаго отличается менѣе, чѣмъ на $^1/_{100}$ долю (такъ какъ 0,0057... <0,01), или какъ говорятъ *вѣрное до сотыхъ долей*; если положимъ 0,32 : 7=0,045, то получимъ частное, которое отъ истиннаго отличается менѣе, чѣмъ на $^1/_{1000}$ (такъ какъ 0,000714... <0,001), или вѣрное до тысячныхъ долей, и т. д. Положивъ 0,32 : 7=0,045, мы дѣлаемъ ошибку на 0,000714...; если же положимъ 0,32 : 7=0,046, то мы сдѣлаемъ ошибку на 0,000286; вторая ошибка менѣе первой, и потому лучше взять 0,32 7=0,046. Отсюда выходитъ правило: *если мы беремъ не всѣ цыфры десятичной дроби, а только нѣсколько цыфръ, то остальныя слѣдуетъ отбросить; но если первая изъ отбрасываемыхъ цыфръ будетъ болѣе 5, то предыдущую должно увеличить единицею*; такъ, если въ дроби 0,9643 хотимъ взять только двѣ цыфры, то получимъ 0,96; а если бы хотѣли ограничиться сотыми долями въ дроби 0,9683, то должно взять 0,97.

Въ какихъ случаяхъ дѣленіе никогда не можетъ кончиться — это мы увидимъ впослѣдствіи.

2-й случай. *Когда дѣлитель будетъ дробь или цѣлое съ дробью.* Положимъ, что надо 3,087 0,0005; уравняемъ число десятичныхъ цыфръ нулями съ правой руки; получимъ 3,0870 : 0,0005; отбросимъ запятыя; получимъ 30870 00005, или 30870 5.

Раздѣливъ 30870 на 5, получимъ 6174. Но, отбросивши запятую въ дѣлимомъ, мы увеличили его въ 10000 разъ, отчего и частное

увеличилось въ 10000 разъ; а отбросивши запятую въ дѣлителѣ, мы увеличили его также въ 10000 разъ, отчего частное уменьшилось въ 10000 разъ; слѣд. частное осталось безъ перемѣны, т. е. 3,0870 0,0005=30870 : 5=6174. Итакъ, *при дѣленіи десятичныхъ дробей должно уравнять число десятичныхъ цыфръ нулями съ правой стороны, потомъ отбросить запятыя и дѣлить какъ цѣлыя числа*; *полученное частное оставить безъ перемѣны.* Напр.

1) 2,25 0,2=2,25 : 0,20=225 : 20=$11^5/_{20}$=$11^1/_4$.

2) 3,75 1,25=375 125=3.

3) 6,25 : 37,5=6,25 : 37,50=625 : 3750=$^{625}/_{3750}$=$^1/_6$.

4) 2 : 0,04=2,00 : 0,04=200 : 004=200 : 4=50.

5) 0,5 : 0,003=0,500 : 0,003=500 : 3=$166^2/_3$.

Такимъ образомъ видимъ, что когда въ дѣлителѣ будетъ десятичная дробь, то въ частномъ можетъ получиться или цѣлое число, или простая дробь, или цѣлое съ дробью.

Можно дѣлать дѣленіе и не приводя дробей къ одному знаменателю. Пусть напр. дано 0,816 : 0,00544. Откинемъ запятыя въ дѣлимомъ и дѣлителѣ и раздѣлимъ 816 на 544; получимъ $^{816}/_{544}$= =$1^{272}/_{544}$=(по сокращеніи)=$1^1/_2$. Но это частное невѣрное; дѣйствительно, отбросивши запятую въ дѣлимомъ, мы увеличили его въ 1000 разъ; слѣд. и частное увеличилось въ 1000 разъ; а отъ того, что отбросили запятую въ дѣлителѣ, мы уменьшили частное во 100000 разъ; слѣд. полученное частное $1^1/_2$ во 100 разъ меньше истиннаго: а потому истинное частное отъ дѣленія 0,816 на 0,00544= =$1^1/_2$ 100=250. Тотъ же результатъ получимъ, если уравняемъ число десятичныхъ цыфръ нулями и раздѣлимъ 81600 на 544.

Можно также дѣленіе на дробь привести къ дѣленію на цѣлое число. Пусть напр. дано раздѣлить 2,38 на 11,9. Отбросимъ въ дѣлителѣ запятую—онъ при этомъ увеличится въ 10 разъ; чтобы частное не измѣнилось, должно и дѣлимое увеличить въ 10 разъ, т. е. перенести запятую вправо черезъ одну цыфру—получимъ 23,8. Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы дѣлить 2,38 на 11,9 можно раздѣлить 23,8 на цѣлое число 119; получимъ 0,2.

Производя дѣленіе по прежде выведенному правилу, т. е. приводя къ одному знаменателю, мы получимъ 2,38 : 11,9= =2,38 11,90=238 1190=$^{238}/_{1190}$=$^1/_5$. Но 0,2=$^2/_{10}$=$^1/_5$, слѣд. въ обоихъ случаяхъ получился одинъ и тотъ же результатъ.

Примѣры: 1) 0,00068 : 0,005=0,68 5=0,136.

2) 2,863 : 1,4=28,63 : 14=2,045.

3) 78,1324 : 0,5=781,324 : 5=156,2648.

4) 0,745 : 1,92=74,5 : 192=0,39 (съ точностью до 0,01).

5) 5,7569 : 2,3=57,569 : 23=2,503.

6) 0,085107 : 283,69=8,5107 : 28369=0,0003.

7) 0,0000072 : 0,002=0,0072 : 2=0,0036.

Производя дѣленіе посредствомъ приведенія дѣлителя въ цѣлое

число, мы получаемъ въ результатѣ цѣлыя числа или десятичныя дроби; при этомъ дѣленіе можетъ быть безконечно, и тогда, ограничиваясь двумя, тремя... десятичными знаками, находимъ частное вѣрное до 0,01; 0,001 и т. д.

216. Вопросы. 1) Какъ дѣлается сложеніе десят. дробей? 2) Нужно ли при сложеніи десят. дробей приводить ихъ къ одному знаменателю? 3) Какъ дѣлается вычитаніе десят. дробей? 4) Какъ дѣлается умноженіе десят. дробей? 5) Вывести правило умноженія десят. дробей изъ правила умноженія простыхъ дробей? 6) Какъ умножить десят. дробь на 0,1? 0,01? 0,001?... 7) Какъ раздѣлить десят. дробь на цѣлое число? Какъ поступать въ томъ случаѣ, когда дѣленіе не оканчивается? 8) Какъ раздѣлить десят. дробь на 0,1? 0,01? 0,001?... 9) Что значитъ найти частное, точное до 0,1? до 0,001?... Какъ это сдѣлать? Какъ поступать, если за той цыфрой частнаго, на которой мы останавливаемся, слѣдуетъ цыфра больше 5? 10) Какъ дѣлается дѣленіе въ томъ случаѣ, когда дѣлитель будетъ десят. дробь или цѣлое съ дробью? Что можетъ получиться при этомъ въ частномъ? 11) Можно ли дѣлать дѣленіе десят. дробей, не приводя ихъ къ одному знаменателю? 12) Какимъ образомъ дѣленіе на десят. дробь привести къ дѣленію на цѣлое число?

217. Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя. Такъ какъ дѣйствія съ десятичными дробями гораздо легче, чѣмъ съ простыми, то необходимо умѣть обращать дроби простыя, въ десятичныя Положимъ, что нужно обратить дробь $^7/_{16}$ въ десятичную; это значитъ, нужно узнать, сколько она содержитъ десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ и т. д. долей. Мы знаемъ, что дробь есть частное, происходящее отъ раздѣленія числителя на знаменателя; поэтому раздѣлимъ 7 на 16; 16 въ 7 не содержится, пишемъ въ частномъ 0 цѣлыхъ; обративъ 7 въ десятыя доли и раздѣливъ 70 на 16, получимъ въ частномъ 4 *десятыхъ*, а въ остаткѣ 6 *десятыхъ*; обратимъ остатокъ въ сотыя доли и снова раздѣлимъ на 16, получимъ въ частномъ 3 *сотыхъ* и въ остаткѣ 12 сотыхъ; раздѣливъ 120 на 16, найдемъ въ частномъ 7 и въ остаткѣ 8 *тысячныхъ*; наконецъ, раздѣливъ 80 на 16, получимъ 5 *десятитысячныхъ* въ частномъ и въ остаткѣ 0.

```
 70 | 16
----|--------
 60 |0,4375
----
 120
----
  80
----
   0
```

Итакъ $^7/_{16}$=0,4375. Поэтому, *чтобы обратить правильную простую дробь въ десятичную, должно числителя умножить на 10 и раздѣлить на знаменателя—получимъ въ частномъ десятыя доли; остатокъ опять умножить на 10 и раздѣлить на знаменателя—получимъ сотыя доли, и т. д.*

Такъ $^3/_4$=0,75; $^1/_2$=0,5; $^4/_{25}$=0,16; $^{11}/_{250}$=0,044 и т. п.

Если требуется неправильную дробь обратить въ десятичную, то должно исключить цѣлое число и потомъ поступать по предыдущему; напр. $^7/_4=1^3/_4=1{,}75$; $^8/_5=1^3/_5=1{,}6$ и т. под.

218. Дроби точныя и періодическія. Во всѣхъ предыдущихъ примѣрахъ дѣленіе окончилось; но могутъ быть даны такія простыя дроби, что сколько бы мы ни продолжали дѣленіе, оно никогда не окончится. Обращая напр. дробь $^5/_7$, легко убѣдиться, что дѣленіе никогда не можетъ кончиться. Дѣйствительно, для обращенія простой дроби въ десятич., мы помножаемъ числителя ея на 10, затѣмъ остатокъ опять на 10 и т. д.; иначе говоря—мы помножаемъ числителя на 10,100,1000.... и произведеніе дѣлимъ на знаменателя; но, 10, 100, 1000.... состоятъ только изъ производителей 2 и 5; слѣд. *если дробь несократима, то дѣленіе тогда только можетъ окончиться, когда въ составъ знаменателя входятъ только производители 2 или 5, или оба вмѣстѣ, и въ такомъ случаѣ полученная десятичная дробь будетъ содержать столько цыфръ, сколько разъ повторяется 2 или 5, смотря по тому, какое изъ этихъ чиселъ повторяется чаще.* Дѣйствительно, если напр. имѣемъ дробь $^{13}/_{50}$, знаменатель которой равенъ 2.5.5, то эта дробь обратится въ десятичную конечную, или точную, и будетъ выражена въ сотыхъ доляхъ, потому что 100 дѣлится на 50 безъ остатка. Дробь $^{173}/_{800}$ также обратится въ десятичную точную и будетъ содержать 5 цыфръ, потому что въ составъ знаменателя *ея* число 2 входитъ множителемъ пять разъ, и слѣд. только единица съ пятью нулями, то есть число 100000, можетъ раздѣлиться на 800 безъ остатка. Въ самомъ дѣлѣ, обративъ $^{173}/_{808}$ въ десятичную, найдемъ 0,21625.

Если же въ знаменателя несократимой дроби входитъ какой-нибудь другой первоначальный производитель, кромѣ 2 и 5 (напр. 3,7,11...), *а также если 2 и 5* вовсе *нѣтъ, то такая дробь обратится въ безконечную*, потому что ни 10, ни 100, ни 1000....., вообще единица со сколькими бы ни было нулями не можетъ раздѣлиться на 3, 7, 11, 13..., и слѣд. сколько бы ни приписывали нулей, дѣленіе никогда не окончится. Такимъ образомъ дробь $^5/_7$ нельзя точно обратить въ десятичную; т. е. $^5/_7$ не можетъ быть точно выражена ни въ десятыхъ, ни въ сотыхъ, ни въ тысячныхъ— вообще ни въ какихъ десятичныхъ доляхъ единицы, и дробь $^5/_7$ равна *безконечной* дроби 0,71428571428571..... Точки, поставленныя послѣ нѣсколькихъ цыфръ этой дроби, показываютъ, что она безконечная. Такъ какъ въ этой безконечной дроби постоянно повторяются однѣ и тѣ же цыфры, именно 714285, то она наз. *періодическою*, а повторяющіяся цыфры наз. *періодомъ*.

219. *Всякая безконечная дробь, получаемая отъ обращенія простой дроби, непремѣнно будетъ періодическою.* Дѣйствительно

получаемые при дѣленіи остатки всегда должны быть меньше дѣлителя (если, напр., знаменатель обращаемой дроби будетъ число 22, то въ остаткѣ могутъ получиться числа 1, 2, 3..... 21); слѣд. продолжая дѣленіе, мы непремѣнно получимъ одинъ изъ прежнихъ остатковъ, а потому и прежнюю цыфру въ частномъ; потомъ остатки будутъ возвращаться въ прежнемъ порядкѣ, слѣд. цыфры въ частномъ также повторятся и составитъ періодъ.

Вотъ нѣсколько примѣровъ період. дробей.

$^5/_{11}$=0,454545.....; $^1/_3$=0,333.....; $^{13}/_{37}$=0,351351.....

220. Замѣчательныя періодич. дроби происходитъ отъ обращенія $^1/_9$, $^1/_{99}$, $^1/_{999}$....., а именно: $^1/_9$=0,111.....; $^1/_{99}$=0,0101.....;

$^1/_{999}$=0,001001.....; $^1/_{9999}$=0,00010001.....

Каждый изъ этихъ періодовъ состоитъ изъ единицы, передъ которой находится столько нулей, сколько въ знаменателѣ цыфръ безъ одной; такъ въ дроби $^1/_{999}$ знамен. состоитъ изъ трехъ цыфръ, а періодъ ея есть 001; такимъ образомъ, можно сказать напередъ, что періодъ дроби $^1/_{999999}$ будетъ 000001; и дѣйствительно, обративъ ее въ десятичную, получимъ 0,000001000001.....

221. Чистыя и смѣшанныя періодическія дроби. Во всѣхъ предыдущихъ дробяхъ неріодъ начинается съ первой цыфры послѣ запятой; но бываютъ и такія дроби, гдѣ періодъ начинается со второй, третьей....., вообще не съ первой цыфры послѣ запятой, а съ какой-нибудь другой. Возьмемъ, напр., дроби $^7/_{22}$, $^{11}/_{60}$, $^{113}/_{3000}$. Получимъ; $^7/_{22}$=0,31818...; $^{11}/_{60}$=0,1833...; $^{113}/_{3000}$=0,037666....

Въ первой дроби періодъ начинается съ второй цыфры, во второй дроби—съ третьей, а въ третьей—съ четвертой.

Тѣ дроби, въ которыхъ періодъ начинается съ первой цыфры послѣ запятой, наз. чистыми періодическими дробями, а *тѣ, въ которыхъ періодъ начинается не съ первой цыфры, а съ какой-нибудь другой,—смѣшанными періодическими.* Такъ дробь 0,3737... будетъ чистая, а 0,3777.... смѣшанная періодическая.

Періодическія дроби обозначаются еще такимъ образомъ: 0,(45); 0,1(6); 0,235(69); это уже не будетъ значить 45 сотыхъ, 16 сотыхъ, 23569 стотысячныхъ, а 0,454545...; 0,1666...; 0,235696969...

222. *Несократимыя дроби, въ составъ знаменателей которыхъ не входятъ множители 2 и 5, обращаются въ чистыя періодическія дроби*: такъ $^2/_3$=0,666...; $^4/_7$=0,571428571428...; $^{19}/_{113}$=0,171171171....; $^5/_{37}$=0,135135135...

223. Возьмемъ теперь такую несократимую дробь, въ составъ знаменателя которой входятъ 2 и 5 вмѣстѣ съ другими множителями, напр. $^{17}/_{120}$. Не трудно доказать, что эта дробь обратится въ смѣшанную періодическую. Разложивъ знаменателя нашей дроби на первоначальныхъ множителей, найдемъ, что онъ=2.2.2.5.3; слѣд.,

дробь $\frac{17}{120}=\frac{17}{2.2.2.6.3}$; умноживъ числителя и знаменателя на 5.5, найдемъ $\frac{17}{120}=\frac{17.5.5}{2.2.2.5.3.5.5}$; но 17.5.5=425, а 2.2.2.5.5.5= =1000, слѣд. $\frac{17}{120}=\frac{425}{1000.3}=\frac{425}{3}$: 1000; т. е. данная дробь $^{17}/_{120}$ въ 1000 разъ меньше числа $^{120}/_{3}$, или $141^{2}/_{3}$. Обративши $^{2}/_{3}$ въ десятичную, получимъ чистую періодическую дробь 0,666....; а слѣд. $^{425}/_{3}=141^{6}/_{3}$=141,666... Чтобы найти періодическую дробь, равную данной дробя $^{17}/_{120}$, должно 141,666.... уменьшить въ 1000 разъ, то есть перенести запятую влѣво черезъ три цыфры; найдемъ, что $^{17}/_{120}$=0,141666...— получили дробь, которой періодъ начинается съ четвертой цыфры послѣ запятой, или до періода которой находятся 3 цыфры. Разсуждая точно такъ же, найдемъ, что дробь $\frac{113}{550}=\frac{113}{2.5.5.11}$ обратится въ періодическую, которая до періода будетъ имѣть двѣ цыфры, и слѣд. періодъ начнется съ третьей цыфры послѣ запятой; дѣйствительно, $^{113}/_{120}$=0,20545454...

Въ составъ знаменателя дроби $^{17}/_{120}$ число 2 входило множителемъ 3 раза—и періодъ начался черезъ 3 цыфры послѣ запятой; въ знаменателѣ дроби $^{129}/_{120}$ число 5 входило множителемъ 2 раза— и періодъ начался черезъ двѣ цыфры. Вообще слѣд., *если въ составъ знаменателя несократимой дроби входятъ производителями 2 или 5, или оба эти числа вмѣстѣ съ другими множителями, то эта дробь обратится въ смѣшанную періодическую, и до періода ея будетъ столько цыфръ, сколько разъ входитъ производителемъ 2 или 5, смотря по тому, какое изъ этихъ чиселъ повторяется чаще*. Такъ, если знамен.=2.2.2.3.7.5.5, и если притомъ дробь несократима, то она обратится въ смѣшанную періодяч., и до періода будетъ 3 цыфры, ибо 2 входитъ множителемъ 3 раза.

224. Положимъ, что требуется узнать, въ какія десятичныя дроби обратятся $^{11}/_{300}$, $^{60}/_{300}$, $^{9}/_{360}$, $^{120}/_{380}$, $^{6}/_{360}$, $^{120}/_{360}$.

Для этого сначала сократимъ ихъ; первую сократить нельзя; вторая совращается на 60, третья на 9, четвертая па 18 пятая на 6, шестая на 120; получимъ $^{17}/_{360}$, $^{1}/_{6}$, $^{1}/_{40}$, $^{7}/_{20}$, $^{1}/_{60}$, $^{1}/_{3}$.

Теперь разложимъ знаменателей на первоначальныхъ множителей; найдемъ: 360=2.2.2.3.3.5; 40=2.2.2.5;

20=2.2.5; 60=2.2.3.5; 3=3.

Такъ какъ въ знамен. третьей и четвертой дроби входятъ только множители 2 и 5, то обѣ онѣ обратятся въ десятичн. точныя, и притомъ третья дробь будетъ выражена въ тысячныхъ, а четвертая въ сотыхъ доляхъ; знамен. шестой дроби вовсе не содержитъ 2 и 5, и потому эта дробь обратится въ чистую періодич.; остальныя дроби обратятся въ смѣш. періодич., и притомъ въ первой

до періода будетъ 3 цыфры, въ пятой—двѣ цыфры, а во второй періодъ начнется со второй цыфры послѣ запятой. И дѣйствительно,

$^{17}/_{360}$=0,04722...., $^{1}/_{3}$=0,1666....; $^{1}/_{40}$=0,025;

$^{7}/_{20}$=0,35; $^{1}/_{60}$=0,01666....; $^{1}/_{3}$=0,333....

225. Положимъ, что дано обратить въ десятичную дробь $^{5}/_{13}$: $^{5}/_{13}$=0,384615....; это будетъ дробь безконечная; слѣд. сколько бы ни брали цыфръ, она все-таки не будетъ точно равна данной дроби $^{5}/_{13}$; иначе говоря, между дробью $^{5}/_{13}$ и найденной десятичной дробью будетъ всегда нѣкоторая разность.

Если мы ограничимся двумя цыфрами, то получимъ дробь 0,38, которая $<^{5}/_{13}$ (такъ какъ мы отбросили 0,004515....); если же взяли бы 0,39, то эта дробь была бы больше $^{5}/_{13}$; такъ какъ разность между 0,39 и 0,38 равна 0,01, а между тѣмъ $^{5}/_{13}$ содержится между этими двумя дробями, то слѣд. $^{5}/_{13}$ отъ каждой изъ этихъ дробей разнится *менѣе, чѣмъ на* $^{1}/_{100}$ *долю*. Взявши три цыфры, получимъ дроби 0,384 и 0,385, разнящіяся отъ $^{5}/_{13}$ менѣе, чѣмъ на $^{1}/_{1000}$, или вѣрныя до $^{1}/_{1000}$; при четырехъ цыфрахъ получимъ приближеніе до $^{1}/_{10000}$, и т. д.

Такъ какъ $^{1}/_{1000}<^{1}/_{100}<^{1}/_{10}$, то слѣд. *чѣмъ больше беремъ цыфръ, тѣмъ десятичная дробь ближе къ простой*. Какую именно изъ двухъ десятичныхъ дробей брать для выраженія данной простой дроби, напр. 0,38 или 0,39, а также 0,384 или 0,385—это зависитъ отъ того, какова будетъ слѣдующая цыфра: *если первая изъ отбрасываемыхъ цыфръ больше 5, то предыдущую должно увеличить единицею*. Такъ вѣрнѣе взять 0,385, а не 0,384, ибо во второмъ случаѣ мы сдѣлали бы ошибку на 0,000615...., тогда какъ въ первомъ ошибка будетъ меньше.

226. Обращеніе десятичныхъ дробей въ простыя.

1) *Чтобы обратить точную десятичную дробь въ простую, должно подписать подразумѣваемаго знаменателя и потомъ, если можно, сократить.* Напр. 0,36=$^{36}/_{100}$=$^{9}/_{25}$; 0,008=$^{8}/_{1000}$==$^{1}/_{125}$; 1,375=1$^{375}/_{1000}$=1$^{3}/_{8}$.

2) Положимъ, что надо стую періодическую дробь 0,3636.... обратить въ простую. Раздѣлимъ 0,363636..., на періодъ 36; получимъ въ частномъ 0,010101.... Но какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, то слѣд. 0,363636....=36.0,010101....; а 0,010101....=$^{1}/_{99}$, какъ мы видѣли прежде (§ 220); слѣд. 0,363636...=36.$^{1}/_{99}$=$^{36}/_{99}$=$^{5}/_{11}$.

Если бы надо было обратить въ простую дробь 0,135135...., то, раздѣливъ данную дробь на 135 и разсуждая по предыдущему, нашли бы, что она=$^{135}/_{999}$=$^{15}/_{111}$=$^{5}/_{37}$.

Итакъ, *чтобъ обратить чистую періодическую дробь въ простую, должно числителемъ написать періодъ, а знаменателемъ цыфру 9 столько разъ сряду, сколько цыфръ въ періодѣ.*

Напр. $0,01020102....={}^{102}/_{9999}={}^{34}/_{3333}$; $2,4545....=2{}^{45}/_{99}=2{}^{5}/_{11}$.

Это правило можно доказать еще слѣдующимъ образомъ: положимъ, что $0,363636...=x$; помножимъ обѣ части этого равенства на единицу со столькими нулями, сколько цифръ въ періодѣ, т. е. на 100; получимъ $100x=36,3636...$; вычтя отсюда $x=0,363636...$, получимъ $99x=36$, откуда $x={}^{36}/_{99}$.

Вотъ еще доказательство:

$$0,3636...=0,36+0,0036+0,000036+...;$$

этотъ рядъ представляетъ безконечную нисходящую геометрическую прогрессію; сумма ея=первому члену, раздѣленному на единицу безъ знаменателя прогрессіи; слѣд. $0,3636... = 0,36 : (1 - 0,01)= =0,36 \quad 0,99={}^{36}/_{99}$.

3) Положимъ, что требуется смѣшанную період. дробь 0,412727... обратить въ простую. Для этого перенесемъ запятую къ періоду; получимъ 41,2727.... Такъ какъ теперь дробь будетъ уже чистая періодическая, то, обративъ ее въ простую, получимъ $41,2727....= =41{}^{27}/_{99}=41{}^{3}/_{11}$. Но когда мы перенесли запятую къ періоду, то увеличили данную періодич. дробь во 100 разъ; а потому полученное число $41{}^{3}/_{11}$ должно раздѣлить на 100; получимъ $41{}^{3}/_{11} : 100= ={}^{454}/_{11} : 100={}^{454}/_{1100}={}^{227}/_{550}$. Итакъ $0,412727....={}^{227}/_{550}$. Такъ же найдемъ, что $0,01515...={}^{1}/_{66}$; $0,12333....={}^{37}/_{300}$; $0,013636....= ={}^{3}/_{220}$, и т. под.

Итакъ, *чтобы обратить смѣшанную періодическую дробь въ простую, должно перенести запятую къ періоду и потомъ обратить какъ чистую періодическую; наконецъ полученное число уменьшить во столько разъ, во сколько мы увеличили данную періодическую дробь тѣмъ, что перенесли запятую къ періоду.*

277. Можно вывести еще другое правило для обращенія смѣшан. період. дробей въ простыя. Положимъ данную дробь $0,412727...=x$, перенесемъ запятую до перваго періода; получимъ $100x=41,2727...$; теперь перенесемъ запятую до второго періода; получимъ $10000x= =4127,2727......$; вычтя отсюда $100x= 41,2727.....$, найдемъ

$$9900x=4127-41 \text{ откуда } x=\frac{4127-41}{9900}=\frac{4086}{9900}=\frac{227}{550}.$$

Итакъ, *чтобы обратить смѣшанную періодическую дробь въ простую, должно изъ числа, стоящаго между запятою и началомъ второго періода* (4127), *вычесть число, стоящее между запятою и началомъ первого періода* (41): *полученная разность будетъ числителемъ, а знаменателемъ будетъ цифра 9, написанная столько разъ сряду, сколько цифръ въ періодѣ, и со столькими нулями, сколько цифръ до періода.*

Замѣтимъ, что этотъ же способъ годится и для обращенія чистой періодической дроби; въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ дробь 0,4545.... поступая по этому способу, будемъ имѣть

$$0,4545...=\frac{4545-45}{9900}={}^{4500}/_{9900}={}^{45}/_{99}={}^{5}/_{11}.$$

228. Числа ирраціональныя. Мы разсмотрѣли безконечныя *періодическія дроби*; но можно представить себѣ множество *безконечныхъ десятичныхъ дробей не періодическихъ*; стоитъ только писать десятичныя цыфры безъ всякаго порядка, или даже хотя бы я въ нѣкоторомъ порядкѣ, но не періодическомъ; такова, напр., дробь 0,1234 56789101112..., въ которой десятичныя цыфры представляютъ послѣдовательный рядъ чиселъ, а также дроби

0,344555666677777 ...; 2,34455533444555... и т. п.

Мы видѣли, что всякая простая дробь выражается или десятичной конечной, или безконечной *періодической*; слѣд., *безконечныя неперіодическія дроби не могутъ быть выражены никакой простой дробью*; дѣйствительно, еслибы допустить противное, то вышло бы, что одна и та же простая дробь можетъ равняться двумъ различнымъ десятичнымъ, что невозможно. Такія безконечныя неперіодическія дроби и вобще *числа, которыхъ нельзя точно выразить цѣлой единицей и никакой ея долей, наз. числами ирраціональными или несоизмѣримыми съ единицею.* Въ самой природѣ существуютъ такія величины, которыхъ нельзя точно выразить числомъ; такъ окружность несоизмѣрима съ діаметромъ, и если принять діаметръ за единицу, то длина окружности$=3,1415926...$ Также годъ несоизмѣримъ съ сутками и равенъ 365,2422008.., сут., выражаясь безконечною неперіодическою дробью; квадратный корень изъ 3, кубич. кор. изъ 4 и т. под. суть также числа ирраціональныя.

229. Совокупныя вычисленія съ простыми и десятичными дробями. Если нужно сдѣлать вычисленіе, въ которое входятъ и простыя, и десятич. дроби, то должно обращать или всѣ простыя въ десятич. или обратно, смотря по тому, что удобнѣе. Вычислимъ напр.

$$\left[\left(5\tfrac{7}{16}+9,03+\tfrac{1}{2}\right)-\left(3\tfrac{1}{8}+0,47\right).\,2\tfrac{1}{4}\right]:0,0025$$

Здѣсь всѣ данныя десятич. дроби точныя и простыя также обращаются въ точныя; поэтому, обративъ ихъ въ десятич. и сдѣлавъ показанныя дѣйствія, найдемъ 2751,5.

Возьмемъ еще выраженіе $\tfrac{2}{5}+0,635+1\tfrac{4}{7}+0,5454....$

Обратимъ десятичныя дроби въ простыя; получимъ: $\tfrac{2}{5}+\tfrac{635}{1000}+$ $+1\tfrac{4}{7}+\tfrac{54}{99}=\tfrac{2}{5}+\tfrac{127}{200}+1\tfrac{4}{7}+\tfrac{6}{11}=3\tfrac{2339}{15400}$. Если въ этомъ выраженіи обратимъ простыя дроби $\tfrac{2}{5}$ и $\tfrac{4}{7}$ въ десятичныя, то получимъ $0,4+0,635+1,571428571428.....+0,5454.....$ Ограничиваясь тысячными долями, получимъ $0,4+0,635+1,571+0,545=3,151$. Этотъ результатъ отъ ранѣе найденнаго $3\tfrac{2339}{15400}=3,15188.....$ отличается менѣе чѣмъ на 0,001.

230. Вопросы. 1) Какъ обратить простую дробь въ десятичную? 2) Какъ раздѣляются десят. дроби, получаемыя отъ обращенія простыхъ? 3) Почему иногда получаются безконечныя дроби? 4) Почему

всякая безконечная десят. дробь, получаемая отъ обращенія простой, непремѣнно должна быть періодическою? 5) Какъ раздѣляется період. дроби? 6) Что наз. чистою період. дробью? смѣшанною? 7) Какія дроби обращаются въ десят. точныя? чистыя періодич.? смѣш. періодич.? 8) Какъ узнать, въ какую десят. обратится данная простая дробь? 9) Какъ обратить въ простую точную десят. дробь? чистую періодич.? смѣшанную період.? 10) Какъ вычисляются выраженія, въ которыя входятъ и простыя, *и* десят. дроби?

231. Приближенныя вычисленія. Мы изложили всѣ правила по которымъ производятся ариѳметическія дѣйствія съ цѣлыми *и* дробными числами; эти правила даютъ возможность находить точный результатъ всякаго вычисленія; но иногда нужно бываетъ знать только приближенную *до извѣстной степени* величину результата; въ такомъ случаѣ употребляются сокращенныя способы вычисленій, которые мы теперь и разсмотримъ.

232. Сложеніе Положимъ, что требуется найти сумму чиселъ 5,349272+0,0067+4,769879 съ точностью до 0,01 (т. е. такъ чтобы полученный результатъ отличался отъ истинной суммы меньше, чѣмъ на 0,01). Для этого возьмемъ въ каждой дроби по 3 десятичныя цыфры и полученныя числа сложимъ: 5,349+0,006+4,769 = 10,124; отбросимъ въ суммѣ послѣднюю цыфру, а предыдущую увеличимъ единицею; число 10,13 будетъ сумма данныхъ чиселъ, вѣрная до 0,01. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ каждое слагаемое было точно до 0,001, а всѣхъ слагаемыхъ было меньше десяти, то сумма трехъ слагаемыхъ будетъ заключать ошибку <0,001.10 или <0,01, и слѣд. истинная сумма данныхъ чиселъ >10,124 и <10,134; поэтому число 10,13, заключающееся между этими предѣлами, будетъ выражать сумму данныхъ чиселъ съ точностью до 0,01.

Итакъ, *если слагаемыхъ менѣе 10, то каждое изъ нихъ должно выразить въ такихъ доляхъ, которыя были бы въ 10 разъ менѣе требуемой точности суммы* (напр. въ сотыхъ, если сумма должна быть вычислена съ точностію до 0,1): *потомъ, сложивъ преобразованныя дроби, отбросить въ суммѣ послѣднюю цыфру, а предыдущую увеличить единицею. Если слагаемыхъ будетъ дано болѣе 10 и менѣе 100*, разсуждая подобнымъ образомъ, найдемъ, что *каждое изъ нихъ должно выразить во такихъ доляхъ, которыя во 100 разъ менѣе требуемой точности, и затѣмъ сложивъ полученныя числа, отбросить въ суммѣ двѣ послѣднія цыфры, увеличивъ предыдущую единицей.*

233. Вычитаніе. Найти разность дробей 0,6789576 и 0,3567042 съ точностью до 0,01? Возьмемъ въ каждой дроби по двѣ десятичныхъ цыфры и полученныя дроби вычтемъ одну изъ другой 0,67—0,35=0,32; это и будетъ искомая разность. Дѣйствительно, чтобы получить истинную разность, должно бы въ найденной придать или вычесть изъ нея разность тѣхъ чиселъ на которыя измѣнились уменьшаемое и вычитаемое (въ данномъ случаѣ нужно придать разность 0,00895776—0,0067042), но какъ эти измѣненія <0,01, то и разность между ними <0,01; а потому разность между точной раз-

ностью и найденной также $<0{,}01$; т. е. 0,32 есть разность данныхъ чиселъ, точная до 0,01. Итакъ, *при вычитаніи должно ограничиться столькими десятичными цифрами, сколько хотимъ ихъ имѣть въ равности, и полученныя дроби вычесть.*

234. Умноженіе. Пусть требуется найти произведеніе 27,2304268564 на 316,643852103672 съ точностью до 0,01. Принявши одно изъ этихъ чиселъ, напр. второе, за множителя, пишемъ его подъ множимымъ такъ, чтобы цыфра единицъ его (5) приходилась подъ цыфрою множимаго того разряда, который во 100 разъ менѣе заданнаго приближенія, т. е. подъ 4 десятитысячными; а другія цыфры множителя напишемъ наоборотъ, т. е. десятки, сотни справа, а десятыя, сотыя... доли слѣва единицъ. Потомъ помножимъ множимое на первую цыфру множителя съ правой руки, т. е. на 3, начиная съ цыфры 6, подъ которой стоитъ 3; получимъ первое частное произведеніе 81691278, которое и пишемъ подъ чертою такъ, чтобъ его первая цыфра съ правой руки (8) приходилась подъ первой же цыфрой множителя (т. е. подъ 6 и 3); далѣе — помножимъ на 1, начиная съ цифры множимаго 2, подъ которой стоитъ 1; получимъ второе частное произведеніе 2723042, которое пишемъ такъ, чтобы первая цыфра его справа (2) приходилась опять подъ первой же цыфрой прежняго произведенія (8). Потомъ помножимъ на 5, начиная съ 4, и опять напишемъ произведеніе такимъ же образомъ, и т. д. Предпослѣднее произведеніе 216 получится отъ умноженія 27 на 8; послѣднее 10 отъ умноженія послѣдней цыфры множимаго, считая справа (2) на стоящую подъ ней цыфру множителя 5; остальныя цыфры множителя отбросимъ. Сложивъ всѣ частныя произведенія, получимъ число 85951154; отбросимъ въ немъ послѣднія двѣ цыфры (54), въ оставшемся числѣ 859511 увеличимъ послѣднюю цыфру единицею; наконецъ отдѣлимъ занятою въ полученомъ числѣ 859512 двѣ цыфры отъ правой руки; тогда и найдетъ число 8595,12, которое и будетъ произведеніе данныхъ чиселъ, вѣрное до 0,01. Докажемъ это. Изъ самаго расположенія дѣйствія видно, что мы дѣлали слѣдующія умноженія:

```
        272304268564
    27630125,8346513 ×
    ------------------
            81691278
             2723042
             1361520
           + 163380
               10892
                 816
                 216
                  10
            --------
            85951154
```

27,230426.300	=	8169,1278
27,23042.10	=	272,3042
27,2304.5	=	136,1520
27,230.0,6	=	16,3380
27,23.0,04	=	1,0892
27,2.0,003	=	0,0816
27,0,0008	=	0,0216
20.0,00005	=	0,0010

Общее произведеніе = 8595,1154

Такимъ образомъ мы отбросили слѣдующія произведенія:

0,0000008564.800<0,000001.300 *или* <0,0001.3
0,0000068564.10 <0,00001 .10 или <0,0001.1
0,0000268564.5 <0,0001.6
0,0004268664.0,6 <0,001.0,6 или <0,0001.6
0,0004268664.0.04<0,01.0,04 или <0,0001.4
0,0304268564.0,003<0,1.0,003 или <0,0001.3
0,2304268564.0,0008<1.0,0008 или <0,0001.8
7,2304268564.0,00005<10.0,00005 или <0,0001.5

и 27,2304268564.0,000002103672<100.0,000003 или<0,0001.3. такъ какъ множимое<100, а множитель<0,000003.

Поэтому разность *между* истиннымъ произведеніемъ и найденнымъ т. е. ошибка <0,0001. (3+1+5+6+4+3+8+5+3); или, написавши послѣднее слагаемое 3 въ видѣ 2+1, найдемъ, что ошибка менѣе 0,0001. (3+1+5+6+4+3+8+5+2+1); здѣсь 3+1+5+6+4+3+8+5 есть сумма тѣхъ цыфръ множителя, на которыя мы помножали; 2 есть первая (высшая) цыфра множимаго; поэтому погрѣшность результата менѣе 0,0001, умноженной на сумму употребленныхъ цыфръ множителя, увеличенную первой цыфрой множимаго и единицею. Такъ какъ 3+1+5+6+4+3+8+5+ +2+1=38, то ошибка<0,0001.38 или 0,0038; слѣд. она *и* подавно менѣе 0,01; поэтому истинное произведеніе заключается между 8595,1154 и 8595,1254; и положивъ его = 8595,12 мы дѣлаемъ ошибку менѣе 0,01, что и требовалось доказать.

Возьмемъ еще примѣръ. Вычислить 16,384.5957,3179 съ точностью до 0,001. Поступая по предыдущему, должно множителя подписать подъ множимымъ такъ, чтобъ его цыфра единицъ (7) приходилась подъ стотысячными долями множимаго; но какъ во множимомъ такихъ долей нѣтъ, то должно замѣнить ихъ нулями; далѣе, написавши множителя наоборотъ, увидимъ, что надъ его десятками, сотнями и тысячами также нѣтъ цыфръ множимаго; эти цыфры слѣдуетъ также замѣнить нулями и потомъ поступать по предыдущему:

```
1638400000
  97137595
----------
8192000000
1474560000
  81920000
  11468800
    491520
     16384
     11466
      1467
----------
9760469637.
```

Откинувъ двѣ послѣднія цыфры, увеличимъ предыдущую единицею и въ полученномъ числѣ отдѣлимъ запятой 3 цыфры справа; получимъ 97604,697.

Итакъ *чтобы найти приближенное произведеніе двухъ десятичныхъ дробей, должно написать множителя подъ множимымъ въ обратномъ порядкѣ, и при томъ такъ, чтобы цыфра единицъ множителя приходилась подъ цыфрою множимаго того разряда, который во 100 разъ менѣе требуемаго приближенія; потомъ умно-*

жать съ правой руки множимое оа каждую цыфру множителя, исключая тѣ цыфры множимаго, которыя помѣщены вправо отъ каждаго частнаго множителя; полученныя частныя произведенія писать одно подъ другимъ такъ, чтобъ ихъ первыя цыфры съ правой руки помѣщались въ одномъ столбцѣ; потомъ сложить полученныя произведенія какъ цѣлыя числа, въ суммѣ отбросить двѣ цыфры справа, увеличивъ предыдущую единицею; наконецъ отдѣлить запятой отъ правой руки требуемое приближеніемъ число десятичныхъ знаковъ.

Замѣтимъ, что этотъ способъ вѣренъ только въ такомъ случаѣ, когда сумма употребляемыхъ цыфръ множителя, увеличенная первою цыфрою множимаго и единицею, будетъ не болѣе 100; дѣйствительно, въ нашемъ первомъ примѣрѣ ошибка была менѣе 0,0038 и потому менѣе 0,01; а если бы сумма, о которой мы говоримъ, была бы напр. 238, то ошибка была бы менѣе 0,0238, а не 0,1. Если же даны будутъ для умноженія такія числа, что та же сумма будетъ меньше 10, то можно писать единицы множителя подъ тѣмъ разрядомъ множимаго, который *въ десять* разъ меньше приближенія, и потомъ отбросить въ результатѣ только *одну* цыфру.

235. Дѣленіе. Правила для приближеннаго дѣленія основывается на слѣдующемъ свойствѣ чиселъ. Если какое-нибудь число дано раздѣлить на цѣлое число съ дробью, а мы раздѣлимъ его только на цѣлую часть дѣлителя, то найденное частное будетъ, конечно, болѣе истиннаго, и разность между ними будетъ менѣе произведенія истиннаго частнаго на дробь, которой числитель единица, а знаменатель цѣлая часть дѣлителя; напр. если раздѣлить какое-нибудь число на 7 вмѣсто $7^2/_5$, то получимъ частное, которое будетъ отличаться отъ истиннаго менѣе чѣмъ на $^1/_7$ этого частнаго. Чтобы доказать это, возьмемъ число a и раздѣлимъ его сперва на m, потомъ на $m+\frac{n}{p}$, гдѣ $n<p$. Раздѣлить a на m, получимъ $\frac{a}{m}$; а $a:\left(m+\frac{n}{p}\right)=a:\frac{mp+n}{p}=$ $=\frac{ap}{mp+n}$. Вычтя второе частное изъ перваго, получимъ $\frac{a}{m}-\frac{ap}{mp+n}=$ $=\frac{an}{m(mp+n)}$; эта разность менѣе m-й доли истиннаго частнаго которая $=\frac{ap}{m(mp+n)}$, ибо $n<p$.

Положимъ теперь, что дано 4,5463785217 раздѣлить на 0,061236542 съ точностью до 0,01. Узнаемъ сперва, сколько будетъ цѣлыхъ цыфръ въ частномъ; умноживъ дѣлимое и дѣлителя на 100, увидимъ, что цѣлая часть дѣлимаго будетъ 454, а дѣлителя 6; слѣд. въ частномъ получатся десятки и единицы; а такъ какъ приближеніе требуется до 0,01, то слѣд. всѣхъ цыфръ въ частномъ должно быть четыре. Раздѣлимъ теперь 454,63785217 на 0,061236542; такъ какъ дѣлимое мы увеличили во 100 разъ, то и полученное частное будетъ во 100 разъ болѣе истиннаго; а потому, если 454,63785217 раздѣлимъ на 0,061236542 съ точностью до единицы, то есть найдемъ только цѣ-

дыя цыфры частнаго, и потомъ полученное частное уменьшимъ во 100 разъ, то найдемъ частное отъ дѣленія данныхъ чиселъ, то есть 4,5463785217 на 0,061236542, точное до 0,01. Итакъ нужно раздѣлить 454,63785217 на 0,061236542. Умножимъ дѣлимое и дѣлителя на 1000000 и раздѣлимъ 454637852,17 на 61236,542. Чтобы сократить дѣйствіе, раздѣлимъ дѣлимое только на цѣлую часть дѣлителя, т. е. на 61286; отъ этого получимъ, конечно, частное невѣрное; назвавъ это частное a, а истинное частное a_1, найдемъ по предыдущему, что ошибка$=a-a_1<\frac{a_1}{61236}$. Такъ какъ въ частномъ отъ дѣленія 454637852,17 на 61236 получатся 4 цѣлыхъ цыфры, то слѣд. $a_1<10000$ и $\frac{a_1}{61236}<\frac{10000}{60000}$, или $<{}^1/_6$; слѣд., раздѣливъ дѣлимое только на цѣлую часть дѣлителя, мы сдѣлали ошибку $<{}^1/_6$. Число 61236 въ 454637 содержится 7 разъ съ остаткомъ 25985852,17; этотъ остатокъ надо раздѣлить на 61236; уменьшимъ его и дѣлителя въ 10 разъ, т. е. раздѣлимъ 2598585,217 на 6123,6, и, чтобъ упростить дѣйствіе, отбросимъ опять дробь въ дѣлителѣ и раздѣлимъ 2598585,217 на 6123; отъ этого дѣленія въ частномъ должны получиться три цѣлыя цыфры, слѣд. частное меньше 1000, и разсуждая по предыдущему, найдемъ, что мы дѣлаемъ ошибку$<\frac{1000}{6000}$, или опять $<\frac{1}{6}$. Отъ дѣленія 2598585,217 на 6123 получимъ въ частномъ 4 (сотни) и въ остаткѣ 149385,217; уменьшивъ остатокъ и дѣлителя въ 10 разъ, отбросимъ опять въ дѣлителѣ дробь и будемъ дѣлить 14938,5217 на 612; теперь въ частномъ будутъ двѣ цѣлыхъ цыфры, и ошибка опять будетъ менѣе ${}^1/_6$. Такъ какъ 612 въ 1493 содержатся два раза, то въ частномъ пишемъ 2 (десятка); остатокъ 2698,5217 и дѣлителя 612 опять уменьшимъ въ 10 разъ и раздѣлимъ 269,85217 на 61; получимъ въ частномъ 4 единицы и въ остаткѣ 25,85217; ошибка, которую мы сдѣлали, отбросивъ, дробь въ дѣлителѣ, будетъ $<{}^{10}/_{60}$, или опять$<{}^1/_6$. Получивъ такимъ образомъ въ частномъ 7424, мы видимъ, что оно больше истиннаго такимъ числомъ, которое меньше ${}^1/_6$. 4, или$<{}^4/_6$, а слѣд.<1; отбросивъ послѣдній остатокъ 25,85217, который меньше дѣлителя 61, мы уменьшили частное числомъ, меньшимъ единицы; слѣд. 7424 есть частное отъ дѣленія 454,63785217 на 0,061236542, точное до единицы, т. е. оно отличается отъ истиннаго менѣе, чѣмъ на единицу. Но такъ какъ данное намъ дѣлимое 4,5463785217 во 100 разъ менѣе 454,637..., то раздѣливъ частное 7424 на 100, найдемъ 74,24=частному отъ дѣленія 4,54637... на 0,061236... съ точностью до 0,01.

Отсюда выводимъ слѣдующее правило: *опредѣливъ число всѣхъ цыфръ частнаго,* сообразжаясь *съ требуемымъ приближеніемъ, должно перенести запятую въ дѣлителѣ вправо черезъ столько цыфръ, чтобы образовавшаяся цѣлая его часть содержала одною цыфрою больше числа цыфръ требуемаго частнаго; въ дѣлимомъ перенести запятую также вправо черезъ столько цыфръ, чтобъ отъ раздѣленія его цѣлой части на цѣлую часть дѣлителя по-*

лучились единицы (т. е., чтобы дѣлитель содержался меньше 10 разъ); *эти единицы и будутъ составлять первую* (*высшую*) *цыфру частнаго*; *отбросивъ послѣднюю цыфру дѣлителя, дѣлимъ на остальныя остатокъ—получится вторая цыфра частнаго*; *потомъ, отбросивъ еще цыфру въ дѣлителѣ и раздѣливъ на остальныя остатокъ, получимъ слѣдующую цифру и т. д.*; *такихъ дѣленій нужно сдѣлать столько, сколько цыфръ должно быть въ частномъ, наконецъ, надо въ частномъ поставить запятую, соображаясь съ даннымъ приближеніемъ* (т. е., если приближеніе до 0,01, то отдѣлить съ правой руки двѣ цыфры; если до тысячныхъ,—то три и т. д.).

Приложимъ это правило въ нашему примѣру. Такъ какъ въ частномъ должно быть 4 цыфры, то въ цѣлой части дѣлителя должно быть 6 цыфръ; слѣд., запятую нужно перенести черезъ 6 цыфръ—получимъ 61236; въ дѣлимомъ перенесемъ запятую черезъ 5 цыфръ — получимъ 454637; раздѣлимъ это число на 61236; найдемъ въ частномъ 7 и въ остатвѣ 25985; остатокъ дѣлимъ на 6123—получимъ 4 въ частномъ и 1493 въ остаткѣ; его дѣлимъ на 612, получимъ 2, и наконецъ послѣдній остатокъ 269 дѣлимъ на 61, получимъ 4; отдѣливъ въ частномъ 7424 двѣ цыфры справа, найдемъ искомое частное=74,24 съ точностью до 0,01.

Вотъ самое расположеніе дѣйствія:

```
454637|61236
428652|74,24
 25985
 24492
  1493
  1224
   269
   244
    25
```

236. *Примѣры.* 1) 7,275674+8,36894+0,76895+6,6398675+10,7985=33,862 съ точностью до 0,001.

2) 3,649875—2,798463712=0,85 съ точностью до 0,01.

3) 645,9728.4,1875=2705,011 съ точностью до 0,001.

4) 157,143.0,467863=73,52 съ точностью до 0,01.

5) 3596,82:312,59709=11,506 съ точностью до 0,001.

6) 36,84525:28,13247=1,3097 съ точностью до 0,0001.

ГЛАВА VII.

НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

237. *Непрерывною дробью наз. такая, у которой числитель единица, а знаменатель цѣлое число съ дробью, имѣющей числителемъ опять единицу, а знаменателемъ опять цѣлое съ дробью и т. д.*; такъ дроби

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}, \quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{8}}}}$$

и т. под. будутъ непрерывныя.

Дроби эти имѣютъ видъ цѣпи, почему онѣ наз. еще *цѣпными*, и каждая изъ простыхъ дробей, входящихъ въ составъ непрерывной, наз. *звеномъ*; напр. въ первой дроби $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$ будутъ звенья.

Чтобы найти величину непрерывной дроби, должно обратить ее въ простую; покажемъ какъ это дѣлается.

238. Обращеніе непрерывныхъ дробей въ простыя. Положимъ, что дано обратить въ простую дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}}}.$$

Послѣднее смѣшанное число, служащее знаменателемъ, есть $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$; $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=1:\frac{13}{4}=\frac{4}{13}$; $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=2\frac{4}{13}=\frac{30}{13}$; $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}=$

$=1:\frac{30}{13}=\frac{13}{30}$; $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}=2+\frac{13}{30}=\frac{73}{30}$; $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}=$

$=1:\frac{73}{30}=\frac{30}{73}$; $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}=1+\frac{30}{73}=\frac{103}{73}$;

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}=1:\frac{103}{73}=\frac{73}{103}$; $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}=$

$=1+\frac{73}{103}=\frac{176}{103}$; $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}}=1\ \frac{176}{103}=\frac{103}{176}$; далѣе

$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}}=1\frac{103}{176}=\frac{279}{176}$; наконецъ

вся данная непрерывная дробь$=1:{}^{279}/_{176}=\frac{176}{279}$.

Точно такъ же найдемъ, что $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}={}^{68}/_{157}$

дробь, у которой послѣдовательные знаменатели (считая сверху) суть 1, 2, 2, 3, 3, 3, равна $^{185}/_{261}$, и т. под.

239. Обращеніе простыхъ дробей въ непрерывныя. Чтобы представить дробь въ меньшихъ числахъ или въ простѣйшемъ видѣ, должно сократить ее; но если числитель и знаменатель числа первыя между собою, то дробь не сокращается, и тогда ее можно представить въ простѣйшемъ видѣ *только приближенно*, а не точно; для этого должно простую дробь обратить въ непрерывную. Вотъ какъ это дѣлается. Возьмемъ какую-нибудь несократимую дробь напр. $^{224}/_{545}$, и раздѣлимъ числителя и знаменателя ея на числителя, отчего

величина ея не измѣнится; $224 \quad 224=1$; $545 \quad 224=2+\frac{97}{224}$

поэтому $^{224}/_{545}=\cfrac{1}{2+\cfrac{97}{224}}$; раздѣлимъ теперь числителя и знаменателя дроби $^{97}/_{224}$ на числителя; найдемъ $^{97}/_{224}=\frac{97:97}{224:97}=\cfrac{1}{2+\cfrac{30}{97}}$;

слѣд. $^{224}/_{545}=\cfrac{1}{2+\cfrac{97}{224}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{30}{97}}}$; раздѣливъ оба члена дроби

$\frac{30}{97}$ на 30, получимъ $^{30}/_{97}=\cfrac{1}{3+\cfrac{7}{30}}$; поэтому $^{224}/_{545}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{30}{97}}}=$

$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{7}{30}}}}$.

Отъ раздѣленія числителя и знаменателя дроби $^{7}/_{30}$ на 7, найдемъ $^{7}/_{30}=\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{7}}$, и

$$^{224}/_{545}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{7}{30}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{7}}}}}.$$

Поступивъ по предыдущему съ дробью $^{2}/_{7}$, найдемъ $^{2}/_{7}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$,

и потому $$^{224}/_{545}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{7}}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}}}.$$

Это и будетъ искомая непрерывная дробь. Чтобы повѣрить дѣйствіе, стоитъ только обратить ее въ простую, и мы найдемъ $^{224}/_{545}$.

Чтобы вывести правило для обращенія простой дроби въ непрерывную, замѣтимъ, что такъ какъ числитель каждаго звена есть 1, то вопросъ состоитъ только въ нахожденіи знаменателей; что же мы дѣлали для этого? Мы дѣлили сперва 545 на 224, т. е. знаменат. на числит.; получили въ частномъ 2, которое и служитъ знамен. перваго звена; затѣмъ дѣлили 224 на 97, т. е. числит. на первый остатокъ и получили въ частномъ 2, знамен. второго звена; далѣе дѣлили 97 на 30, или первый остатокъ на второй, при чемъ получилось въ частномъ 3 — знамен. третьяго звена, и продолжали такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока дѣленіе не кончилось безъ остатка: словомъ, мы поступали такъ же, какъ при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ. Поэтому, *чтобъ обратить правильную дробь въ непрерывную, должно знаменателя ея раздѣлить на числителя, числителя на первый остатокъ, первый остатокъ на второй и т. д. до тѣхъ поръ пока дѣленіе кончится безъ остатка; полученныя частныя по порядку будутъ знаменателями дробей, составляющихъ непрерывную, считая сверху; а числителемъ каждой дроби будетъ единица.*

Если же дана неправильная дробь, то нужно исключить цѣлое число и потомъ поступать по предыдущему.

Самое дѣйствіе располагается такъ:

```
                              545 | 224
                        224 |  97 | 2
                   97 |  30 |   2
              30 |  7 |  3
          7 |  2 |  4
     3 |  1 |  3
     0 |  3
```

Замѣтимъ, что дѣленіе непремѣнно кончится, потому что остатки постепенно уменьшаются и наконецъ дойдутъ до нуля; слѣд. число звеньевъ всегда будетъ опредѣленное, а не безконечное; послѣдній дѣлитель непремѣнно будетъ единица, если дробь несократима.

Возьмемъ еще примѣръ. Обратимъ въ непрерывную $^{513}/_{2704}$.

Производя послѣдовательное дѣленіе чиселъ 2704 и 513, получимъ частныя 5, 3, 1, 2, 4, 3, 3; сдѣлавши ихъ знаменателями, а числителемъ единицу, найдемъ

$$\frac{513}{2704}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}}}}$$

Точно такъ же найдемъ, что $^{2417}/_{571}=4+$непрер. дробь, послѣдовательные знаменатели которой, считая сверху, суть 4, 3, 2, 2, 3, 2; $3,141=3^{141}/_{1000}=3+$непр. дробь, которой послѣдовательные знаменатели суть 7,10,1,5,2, и т. под.

240. Нахожденіе приближенныхъ величинъ несократимой дроби. Возьмемъ дробь $^{115}/_{392}$ и обратимъ ее въ непрерывную:

$$^{115}/_{392}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}}$$

Чтобы найти приближенныя величины дроби $^{115}/_{392}$, возьмемъ въ непрер. сперва одно звено, потомъ два, три и т. д.; найдемъ

$$\frac{1}{3},\ \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}},\ \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}\ \text{и}\ \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$$

Всѣхъ пяти звеньевъ не беремъ, потому что тогда получимъ не приближенную, а уже точную величину данной дроби. Обративъ эти дроби въ простыя, получимъ $^1/_3$, $^2/_7$, $^5/_{17}$ и $^{22}/_{75}$. Каждую изъ этихъ дробей можно считать приближенной величиной данной дроби.

Если дробь правильная, то всѣ приближенія нечетнаго порядка, то есть первое, третье, пятое.... (въ нашемъ примѣрѣ $^1/_3$, $^5/_{17}$), *больше ея, а четнаго—меньше*. Въ самомъ дѣлѣ, мы нашли, что $^{115}/_{392}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}}$, и чтобы получить первое приближе-

ніе $^1/_3$, ші отбросили отъ знаменателя 3 дробь $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$, т. е. уменьшили его, отчего дробь увеличилась; слѣд. $^1/_3>^{115}/_{391}$. Второе приближеніе $=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$; оно меньше всей непрерывной дроби; въ самомъ дѣлѣ, чтобъ изъ дроби $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}}$ получить $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$, должно отъ знаменателя 2 втораго звена отбросить дробь $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}$, отчего знаменатель уменьшится, а потому $^1/_2>\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$; слѣд. взявъ $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$, мы къ знаменателю 3 перваго звена придали больше, чѣмъ слѣдуетъ, а потому дробь уменьшилась, и $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}<^{115}/_{392}$.

Точно такъ же найдемъ, что третье приближеніе будетъ опять больше, а четвертое меньше данной дроби.

Если данная простая дробь будетъ неправильная, то нечетныя приближенія будутъ меньше, а четныя больше ея.

Напр. $^{104}/_{15}=2+$непрер. дробь, послѣдовательные знаменатели которой суть 3, 4, 1, 2, даетъ приближенія 2, $^7/_3$, $^{30}/_{13}$, $^{37}/_{15}$, изъ которыхъ какъ легко видѣть, 2 и $^{30}/_{13}$ менѣе, а $^7/_3$ и $^{37}/_{16}$ болѣе $^{104}/_{15}$.

Чтобъ опредѣлить степень приближенія найденныхъ дробей къ данной, т. е. узнать, на сколько полученныя приближенныя величины разнятся отъ данной дроби, возьмемъ нашъ первый примѣръ $^{115}/_{392}$ и найдемъ разность между двумя послѣдовательными приближенными дробями, т. е. между первой и второй, второй и третьей и т. д. $^1/_3-^2/_7=$ $=^7/_{21}-^6/_{21}=^1/_{21}$; но $^1/_3>^{115}/_{392}$, а $^1/_7<$ея, слѣд. данная дробь заключается между $^1/_3$ и $^2/_7$, и, принявъ ее равной одной изъ этихъ двухъ дробей, мы сдѣлаемъ ошибку $<^1/_{21}$. Вычитая вторую дробь изъ третьей (такъ какъ третья больше), найдемъ $^5/_{17}-^2/_7=^{35}/_{119}-$ $-^{34}/_{119}=^1/_{119}$; слѣд. дроби $^1/_7$ и $^5/_{17}$ отличаются отъ данной менѣе, чѣмъ на $^1/_{119}$. Точно такъ же найдемъ, что степень приближенія дробей $^5/_{17}$ и $^{22}/_{75}$ есть $^1/_{1275}$. Мы нашли, что

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{1}{21}=\frac{1}{3.7},\ \frac{5}{17}-\frac{2}{7}=\frac{1}{119}=\frac{1}{17.7};\ \frac{5}{17}-\frac{22}{75}=\frac{1}{17.75};$$

слѣд. *разность между двумя послѣдовательными приближенными дробями равна единицѣ, раздѣленной на произведеніе ихъ знаменателей*, и такъ какъ $^1/_{21}>^1/_{119}>^1/_{1275}$, то слѣд. изъ двухъ послѣдовательныхъ приближенныхъ величинъ вторая всегда ближе къ истинной; но первая имѣетъ то преимущество, что выражается меньшими числами.

Примѣры. Приближенныя величины дроби $^{172}/_{721}$ будутъ $^1/_5$, $^{12}/_{51}$, $^{12}/_{66}$; дроби $^{651}/_{2081}-^1/_3$, $^2/_7$...

241. Вопросы. 1) Какія дроби наз. непрерывными? 2) Какъ узнать величину непрер. дроби? 3) Зачѣмъ обращаются дроби въ непрер.? 4) Какъ обратить дробь въ непр.? 5) Какъ находить приближенныя величины данной несократимой дроби? 6) Если дана правильная несократимая дробь, то какія приближенія будутъ меньше ея и какія больше? 7) Если находимъ приближенія неправильной несократимой дроби, то какія изъ этихъ приближеній меньше и какія больше ея? 8) Чему равна разность между двумя послѣдовательными приближенными дробями? 9) Какъ опредѣлить степень приближенія какой-нибудь приближенной величины къ данной дроби? 10) Какая изъ двухъ послѣдовательныхъ приближенныхъ дробей точнѣе?

ГЛАВА VIII.

ОТНОШЕНІЯ.

242. Сравненіе чиселъ. Возьмемъ два числа, напр. 40 и 8; сравнивая ихъ между собой, мы видимъ, что первое больше второго; но при этомъ сравненіи мы можемъ задать два вопроса: 1) *чѣмъ* 40 больше восьми? 2) во *сколько разъ* 40 больше восьми? Чтобъ узнать, *чѣмъ* 40 больше 8, должно изъ 40 вычесть 8, и найдемъ, что 40 больше 8 тридцатью двумя; чтобъ узнать, во *сколько разъ* 40 больше 8, должно 40 раздѣлить на 8; тогда узнаемъ, что 40 больше 8 въ 5 разъ.

Разность 40—8 и частное 40 : 8 наз. *отношеніями*. Вообще *отношеніемъ* наз. *результатъ, полученный отъ сравненія двухъ чиселъ;* отношенія бываютъ *ариѳметическія* или *разностныя,* и *геометрическія,* или *кратныя*. Ариѳмет. отнош. показываетъ, чѣмъ одно число больше или меньше другого, и находится посредствомъ вычитанія; а геометрич. показываетъ, во сколько разъ одно число больше или меньше другого, и находится посредствомъ дѣленія. Такъ, ариѳм. отношеніе 20 и 5 будетъ 20—5=15, а геомет. будетъ 20 5=4. Мы уже говорили, что число показываетъ, во сколько разъ какая-нибудь величина больше единицы или ея доли; поэтому можно сказать, что *число есть отношеніе* (геометрическое) *величины къ единицѣ*. Если нужно найти отношеніе не между числами, а между какими-нибудь величинами, напр. отношеніе высоты башни къ высотѣ дома, то должно измѣрить эти величины одной единицей и найти отношеніе между полученными числами. Понятно, что *отношеніе можно находить только между величинами однородными;* было бы нелѣпо спросить: чѣмъ 28 пудовъ болѣе 15 аршинъ, или во сколько разъ 16 часовъ менѣе или болѣе 64 саженъ, и т. под.

243. Ариометическое отношеніе. Возьмемъ ариом. отнош., напр. 28—12=16. Числа, составляющія отнош., наз. его *членами;* именно, 28 наз. *предыдущимъ членомъ,* 12—*послѣдующимъ,* 16—*разностью.* Такъ какъ предыдущій членъ есть уменьшаемое, а послѣдующій вычитаемое, то слѣд.

1) *Предыдущій членъ=послѣдующему+разностъ,* такъ въ отношеніи 28—12=16 число 28=12+16.

2) *Послѣдующій членъ = предыдущему безъ разности;* такъ въ отношеніи 28—12=16 число 12=28—16.

3) *Если предыдущій членъ увеличимъ или послѣдующій уменьшимъ какимъ-нибудь числомъ, то разность увеличится тѣмъ же числомъ.* Такъ, если въ отношеніи 28--12=16 къ 28 придать 5, то получимъ 33—12=21=16+5; разность увеличилась пятью; если изъ послѣдующаго вычесть 5, то получимъ 28—7=21; разность опять увеличилась пятью.

4) *Если предыдущій уменьшимъ или послѣдующій увеличимъ какимъ-нибудь числомъ, то разность уменьшится тѣмъ же числомъ.* Такъ въ отношеніи 28—12=16 сперва вычтя изъ 28 пять, а потомъ придавши къ 12 пять, получимъ: 23 — 12 = 11 и 28 — —17=11; въ обоихъ случаяхъ разность уменьшилась 5-ю.

5) *Если предыдущій и послѣдующій увеличимъ или уменьшимъ однимъ числомъ, то разность не измѣнится.* Такъ въ нашемъ примѣрѣ, придавъ по 5 къ обоимъ членамъ отнош., получимъ: 33— —17=16; вычтя изъ нихъ по 3, найдемъ: 25—9=16.

244. Вопросы. 1) Какъ мы можемъ сравнивать между собой два числа? 2) Что наз. отношеніемъ? 3) Какъ раздѣляются отношенія? 4) Что показываетъ ариом. отн. и какимъ дѣйствіемъ оно находится? 5) Что показываетъ геом. отн. и какимъ дѣйствіемъ оно находится? 6) Какъ найти отнош. между двумя однородными величинами? 7) Какъ наз. числа, составляющія ариом. отн.? 8) Чему равенъ предыдущій членъ? 9) Зная предыдущій членъ и разность, найти послѣдующій членъ? 10) Зная послѣд. членъ и разность, найти предыд. членъ? 11) Что сдѣлается съ разностью, если предыд. членъ увеличится какимъ-нибудь числомъ? уменьшится? 12) Что сдѣлается съ разностью, если къ послѣд. члену придадимъ или вычтемъ изъ него какое-нибудь число? 13) При какомъ измѣненіи предыд. и послѣдующ. членовъ разность останется безъ перемѣны?

245. Геометрическое отношеніе. Чтобы найти геометрическое отношеніе двухъ чиселъ, должно ихъ раздѣлить одно на другое; напр. геом. отн. 540 и 36 есть 540 : 36=15, или $^{540}/_{36}$=15; геом. отн. 4 и 8 есть 4 : 8=$^{4}/_{8}$=$^{1}/_{2}$. Въ етихъ отношеніяхъ 540 и 4 наз. *предыдущими членами,* 36 и 8 — *послѣдующими,* а 15 и $^{1}/_{2}$ *знаменателями отношеній. Знамен. отнош. есть всегда число отвлеченное.* Если предыдущій членъ больше послѣдующаго, то знам. отн. больше единицы; если же, наоборотъ, послѣдующій больше пре-

дыдущаго, то знам. отн. есть правильная дробь; такъ въ первомъ примѣрѣ знамен. 15>1, а во второмъ $^1/_2$<1. Отношенія 8 : 4 и 4 8 или 6 18 и 18 6, состоящія изъ однихъ чиселъ, но расположенныхъ такъ, что предыдущій членъ одного отношенія служить послѣдующимъ другого, наз. *обратными* другъ другу. Знаменатели двухъ обратныхъ отношеній имѣютъ то свойство, что произведеніе ихъ=1; такъ въ 8 : 4 знамен.=2, а въ 4 : 8 онъ равенъ $^1/_2$; а 2.$^1/_2$=1.

246. Такъ какъ въ геом. отн. предыдущій членъ есть дѣлимое, послѣдующій—дѣлитель, а знамен. отнош.—частное, то

1) *Предыдущій членъ=послѣдующему, умноженному на знаменателя отношенія;* такъ 540=36 . 15; 4=8 . $^1/_2$.

2) *Послѣдующій членъ=предыдущему, раздѣленному на знаменателя отношенія;* такъ 36=540 : 15; 8=4 : $^1/_2$.

3) *Если предыдущій членъ увеличимъ или послѣдующій уменьшимъ въ нѣсколько разъ, то знаменатель увеличится во столько же разъ;* напр. въ отн. 540 : 36=15, увеличивъ предыд. въ 2 раза найдемъ 1080 : 36=30, уменьшивъ послѣд. въ 2 раза, получимъ 540 : 18=30; въ обоихъ случаяхъ знамен. увелич. въ 2 раза.

4) *Если предыдущій членъ уменьшимъ или послѣдующій увеличимъ въ нѣсколько разъ, то знаменатель уменьшится во столько же разъ*; раздѣливъ въ нашемъ примѣрѣ предыд. на 2, получимъ 270 : 36=7$^1/_2$; помноживъ послѣд. на 2, найдемъ 540 : 72= =7$^1/_2$; знамен. уменьшился въ 2 раза.

5) *Если предыдущій и послѣдующій члены умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, то знаменатель отношенія не измѣнится;* помноживъ въ нашемъ примѣрѣ оба члена отношенія на 2, найдемъ 1080 72=15; раздѣливъ тѣ же члены на 2, получимъ 270 : 18=15; въ обоихъ случаяхъ знам. отн. не измѣнился.

472. Основываясь на томъ, что знам. отнош. не измѣнятся, если предыдущій и послѣдующій члены раздѣлимъ или умножимъ на одно и то же число, можно *сокращать отношенія и замѣнять отношеніе между дробями отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ.* Такъ отношеніе 28 : 21 можно сократить на 7 и замѣнить отношеніемъ 4 : 3.

Возьмемъ отношеніе 5$^3/_8$: 2$^7/_{12}$. Обративъ эти числа въ неправильныя дроби, получимъ $^{43}/_8$: $^{31}/_{12}$; приведя къ одному знамен., найдемъ $^{129}/_{24}$: $^{62}/_{24}$; помноживъ оба члена этого отн. на общаго знам. 24, найдемъ 129 62 (потому что $^{129}/_{24}$. 24=129, и вообще дробь, умноженная на своего знаменателя, даетъ въ произведеніи числителя); такимъ образомъ, отн. дробей $^{43}/_8$ и $^{31}/_{12}$ замѣнилось отн. цѣлыхъ чиселъ 129 62. Итакъ, *чтобы отношеніе между дробями или смѣшанными числами замѣнить отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ, должно данныя числа обратить въ неправильныя*

дроби, потомъ привести ихъ къ одному знаменателю и взять отношенiе ихъ числителей. Дѣйствiе сокращается, если

1) дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, напр. $22^4/_{17} : 2^8/_{17} = {}^{378}/_{17} : {}^{42}/_{17} = 378 : 42 = 9$; т. е. *дроби съ одинакими знаменателями относятся такъ, какъ ихъ числители;*

2) если дроби имѣютъ одинакихъ числителей, напр. $^8/_{13} : {}^8/_{15}$; приведи ихъ къ одному знам., найдемъ $\frac{8}{13} : \frac{8}{15} = \frac{8.15}{13.15} : \frac{8.13}{13.15}$, помноживъ оба члена на общаго знам., получимъ $^8/_{13} \quad {}^8/_{15} = 8.15 : 8.13$; наконецъ, раздѣливъ оба члена на 8, получимъ $^8/_{13} \quad {}^8/_{15} = 15 \quad 13$; слѣд. *отношенiе двухъ дробей съ равными числителями равно обратному отношенiю ихъ знаменателей.*

Такъ $^8/_5 : {}^8/_{11} = 11 : 5 = 2^1/_5$; $^{11}/_{20} : {}^{11}/_{60} = 60 : 20 = 3$, и т. под.

248. Вопросы. 1) Что показываетъ геометр. отнош. и какимъ дѣйствiемъ оно находится? 2) Какъ наз. числа, составляющiя отношенiе? 3) Зная послѣд. членъ и знамен. отнош., найти предыд. членъ? 4) Какъ выражается послѣд. членъ чрезъ предыд. и знам. отн.? 5) Какiя отношенiя наз. обратными другъ другу? Какое свойство ихъ знаменателей? 6) Что сдѣлается съ знам. отн., если предыд. членъ увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ? 7) Что сдѣлается съ знам. отношенiя, если послѣд. членъ увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ? 8) При какомъ измѣненiи предыд. и послѣд. членовъ знам. отнош. не измѣнится? 9) Какъ сократить отношенiе? 10) Какъ отн. между дробями замѣнить отн. цѣлыхъ чиселъ? 11) Какъ относятся дроби съ одинакими знамен.? съ одинакими числит.?

ГЛАВА IX.

ПРОПОРЦIИ.

249. Возьмемъ два ариѳм. отнош., которыхъ разности равны, напр. $6 - 4 = 2$ и $10 - 8 = 2$, и два геометр. отнош. съ одинакими знаменателями, напр. $16 \quad 8 = 2$ и $10 : 5 = 2$. Очевидно, что

$$6 - 4 = 10 - 8 \text{ и } 16 : 8 = 10 : 5.$$

Такiя равенства наз. *пропорцiями:* первая—*ариѳметической,* а вторая—*геометрической.* Итакъ, *ариѳметической пропорцiей* наз. *равенство двухъ ариѳметическихъ отношенiй;* а *геометрической пропорцiей* наз. *равенство двухъ геометрическихъ отношенiй.* Числа, составляющiя пропорцiю, наз. *членами ея;* первый и четвертый члены наз. *крайними,* а второй и третiй—*средними.* Ариѳметическая пропорцiя читается такъ: 6 безъ 4-хъ равно десяти безъ восьми; а геометрическая — 16 относится къ 8 ми такъ, какъ 10 къ пяти; или 16 во столько разъ болѣе 8 ми, во сколько

10 болѣе пяти. Геометрическія пропорціи пишутся еще такъ $\frac{16}{8}=\frac{10}{5}$; $\frac{16}{3}=\frac{10}{2}$.

250. Ариѳметическая пропорція. Главное свойство ея. Возьмемъ нѣсколько ариѳметическихъ пропорцій, напр.

$6-4=10-8$; $50-42=20-12$; $7^5/_8-3^1/_2=10^{11}/_{20}-6^{17}/_{40}$. Во всѣхъ этихъ пропорціяхъ замѣчаемъ слѣдующее общее свойство: въ первой проп. $6+8=14$ и $4+10=14$; слѣд. $6+8=4+10$; во 2-й проп. $50+12=62$ и $42+20=62$; слѣд. $50+12=42+20$; въ третьей проп. $7^5/_8+6^{17}/_{40}=7^{25}/_{40}+6^{17}/_{40}=14^1/_{20}$ и $3^1/_2+10^{11}/_{20}=$ $=3^{10}/_{20}+10^{11}/_{20}=14^1/_{20}$; слѣд. $7^5/_8+6^{17}/_{40}=3^1/_2+10^{11}/_{20}$; т. е. во *всякой ариѳметической пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ*. Это и составляетъ *главное* свойство ариѳм. проп. Чтобы доказать, что всякая ариѳм. проп., изъ какихъ бы членовъ она ни состояла, имѣетъ это свойство; возьмемъ проп. $a-b=c-d$, гдѣ подъ a, b, c, d можно подразумѣвать какія угодно числа, цѣлыя или дробныя. Такое выраженіе будетъ пропорція въ *общемъ видѣ*, потому что, поставивъ въ нее вмѣсто буквъ числа, можемъ получить какія угодно ариѳм. проп. Если мы докажемъ, что и въ этой проп. сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ, то изъ этого необходимо будетъ заключить, что и всякая ариѳм. пропор. имѣетъ то же свойство.

Крайніе члены въ проп. первый и четвертый; поэтому сумма крайнихъ $a+d$; а средніе—второй и третій; поэтому сумма среднихъ$=c+b$. Извѣстно, что каждый предыдущій равенъ своему послѣдующему, сложенному съ разностью; слѣд.
$a=b+$разн.; $c=d+$разн.; а потому
$a+d=b+$разн.$+d$; $c+b=d+$разн.$+b$.

Видимъ, что $a+d=c+b$, потому что та и другая сумма равна $b+$разн.$+d$. Итакъ, во всякой пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ.

251. Опредѣленіе неизвѣстнаго члена ариѳм. проп. Возьмемъ проп. $x-7=11-3$; такъ какъ сумма крайнихъ должна быть равна суммѣ среднихъ, то $x+3=11+7$, или $x+3=18$. Здѣсь 18 есть сумма двухъ чиселъ; одно слагаемое есть 3, а другое неизвѣстно; чтобъ опредѣлить его, должно вычесть 3 изъ 18, получимъ $x=15$.

Точно также, если имѣемъ пропорцію $24-x=17-4$, то, слѣд. $17+x=28$, откуда $x=28-17=11$.

Поэтому, *если неизвѣстенъ крайній членъ ариѳм. пропорціи, то, чтобъ опредѣлить его, должно средніе сложить и изъ суммы вычесть другой крайній; если же неизвѣстенъ средній членъ, то должно крайніе сложить и вычесть извѣстный средній.*

Опредѣленіе неизв. члена пропорціи наз. *рѣшеніемъ ея.*

Примѣры. 1) $20^7/_8 - 14^3/_4 = x - 2^3/_8$; $x = 20^7/_8 + 2^3/_8 - 14^3/_4 = 20^8/_8 + 2^3/_8 - 14^6/_8 = 8^5/_8$.

2) $5,72 - 1^3/_{16} = 32 - 0,2x$; $0,2x = 33^7/_{16} - 5,72 = 33,1875 - 5,72 = 27,4675$; $x = 27,4675 : 0,2 = 274675 : 2000 = 137,3375$.

252. Непрерывная пропорція. *Если въ пропорціи средніе члены равны, то она наз. непрерывною;* таковы напр. пропорціи 30—28=28—26· 14—10=10—6 и т. под.

Непрерывную пропорцію пишутъ также слѣдующимъ образомъ: ·/. 30.28.26, ·/. 14.10.6, и т. под.

253. Среднее ариѳметическое двухъ и нѣсколькихъ чиселъ. Возьмемъ непрерывную проп., въ которой средній членъ неизвѣстенъ, напр. $11 - x = x - 7$. Такъ какъ сумма среднихъ = суммѣ крайнихъ, то $2x = 18$, а потому $x = {}^{18}/_2 = 9$. Итакъ, *чтобы опредѣлить неизвѣстный средній членъ непрерывной ариѳм. проп., должно крайніе сложить и сумму раздѣлить на 2.* Средній членъ непрерывн. ариѳм. проп. наз. также *ариѳметической срединой* или *ариѳметическимъ среднимъ числомъ* двухъ другихъ членовъ; поэтому, *ариѳметическая средина двухъ чиселъ=полусуммѣ этихъ чиселъ;* такъ ариѳм. средина 11 и 7 равна $^1/_2 . (11+7) = 9$.

Ариѳметической срединой нѣсколькихъ чиселъ наз. число, которое получимъ, раздѣлись сумму данныхъ чиселъ на число ихъ; напр. чтобы найти ариѳм. средину 15, 14, 19, 25, 10 и 13, сложимъ эти числа и сумму ихъ 96 раздѣлимъ на 6; получимъ 16.

254. При измѣреніи какой-нибудь величины можно ошибиться; поэтому, чтобы получить наиболѣе точный результатъ, дѣлаютъ измѣреніе нѣсколько разъ и затѣмъ берутъ среднее ариѳметическое изъ всѣхъ полученныхъ чиселъ. Положимъ напр., что для опредѣленія высоты горы произведено было измѣреніе четыре раза, и что получились слѣдующіе результаты: 128,4 фута; 127,9 ф.; 128,1 ф.; 128,3 ф.; тогда, взявъ ариѳметичеcв. средину этихъ чиселъ, найдемъ, что высота горы=128,175 фут.

255. Примѣры 1) $2^7/_{16} - x = x - 0,34$; $x = (2^7/_{16} + 0,34)\ \ 2 = 1^7/_{32} + 0,17 = 1^7/_{32} + {}^{17}/_{100} = 1^{311}/_{800}$.

2) $17,66... - x = x - 0,1233...$ Такъ какъ $17,66... = 17^2/_3$; $0,1233... = {}^{37}/_{300}$, то $x = {}^{5337}/_{600} = 8,895$.

256. **Вопросы.** 1) Что наз. ариѳм. проп.? 2) Какіе члены проп. наз. крайними? средними? 3) Въ чемъ состоитъ главное свойство ариѳм. проп.? Доказать это свойство? 4) Какъ опредѣлить неизв. членъ ариѳм. проп.? 5) Какая проп. наз. непрерывною? 6) Что наз. среднимъ ариѳметическимъ двухъ чиселъ? 7) Какъ опредѣлить неизв. средній членъ непрерыв. проп.? 8) Какъ найти ариѳм. среднее нѣсколькихъ чиселъ?

257. Геометрическая пропорція. Главное свойство ея. Мы уже говорили, что геом. проп. есть равенство двухъ геомет. отношеній; такъ 8 : 4=24 : 12 есть геом. проп., потому что 8 : 4=2

и 24 12=2. Четыре числа, изъ которыхъ можно составить пропорцію, наз. *пропорціональными;* можно сказать также, что пропорціональными наз. числа, имѣющіи такое свойство, что отношеніе двухъ изъ нихъ равно отношенію двухъ другихъ; такъ напр. числа 30, 40, 21 и 28 пропорціональны, такъ какъ 30 : 40=$^3/_4$ и 21 : 28=$^3/_4$; а потому 30 40=21 : 28; числа 9, 6, 6 и 4 также пропорціональны, ибо 9 : 6=$^3/_2$ и 6 : 4=$^3/_2$; слѣд. 9 : 6=6 : 4.

Главное свойство геом. проп. состоитъ въ томъ, что *произведеніе крайнихъ членовъ=произведенію среднихъ*. Чтобы доказать это, возьмемъ проп. въ общемъ видѣ a $b=c$ d, гдѣ подъ a, b, c, d можно разумѣть всякія числа, цѣлыя и дробныя. Такъ какъ каждый предыдущій=своему послѣдующему, умноженному на знаменателя отношенія, то слѣд.

$a=b\times$знам. отнош.; $c=d\times$знам. отнош.,

а потому произведеніе крайнихъ членовъ, или

$a\times d=b\times$знам. отнош.$\times d$;

произведеніе среднихъ членовъ, или

$b\times c=b\times d\times$знам. отнош.

Сравнивая между собою выраженія $a\times d$ и $b\times c$, видимъ, что они состоятъ изъ однихъ и тѣхъ же производителей; слѣд.

$a\times d=b\times c$, и потому во всякой геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ=произведенію среднихъ.

Положимъ, что имѣемъ два равныхъ произведенія m $n=p$. q; раздѣливъ обѣ части на np, получимъ $\frac{mn}{np}=\frac{pq}{np}$ или $\frac{m}{p}=\frac{q}{n}$; т. е. *изъ двухъ равныхъ произведеній всегда можно составить пропорцію; при этомъ числа одного произведенія должны быть крайними членами ея, а другого—средними.*

258. Перемѣщеніе членовъ пропорціи. Во всякой геомет. проп. можно перемѣщать члены различнымъ образомъ, но только такъ, чтобы произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ ея оставались равными; именно—*можно перемѣнить мѣста крайнихъ, или мѣста среднихъ, или наконецъ мѣста тѣхъ и другихъ вмѣстѣ.*

Возьмемъ напр. пропорцію . 10 2=20 4;
переставивъ крайніе, получимъ. 4 : 2=20 10;
переставивъ средніе . 10 20= 2 4;
переставивъ тѣ и другіе. 4 20= 2 10;

Теперь можно переставить отношенія, то есть второе поставить первымъ—и обратно; получимъ. 20 : 4=10 2; въ этой проп.
переставимъ крайніе, получимъ. 2 4=10 20;
переставимъ средніе 20 10= 4 2;
переставимъ тѣ и другіе. 2 10= 4 : 20.

Такимъ образомъ, всякая пропорція можетъ имѣть 8 видовъ.

259. Возьмемъ пропорцію 60 30=48 24.

Помноживъ оба предыдущіе на какое-нибудь число, напр. на 5, получимъ 300 : 30=240 : 24.

Помноживъ послѣдующіе на 4, найдемъ 60 : 120=48 : 96.

Помноживъ предыдущіе на 3 и раздѣливъ послѣдующіе на 2, будемъ имѣть 180 : 15=144 : 12.

Помноживъ оба члена перваго отношенія на 4 и раздѣливъ оба члена второго отношенія на 8, получимъ 240 : 120=6 : 3.

Во всѣхъ полученныхъ нами пропорціяхъ произведенія крайнихъ и среднихъ равны; слѣд. пропорціи вѣрны.

Изъ этого заключаемъ, что 1) *можно оба предыдущихъ или оба послѣдующихъ помножить или раздѣлить на одно какое-нибудь число*; 2) *можно оба предыдущихъ помножить на какое-нибудь число, а оба послѣдующихъ раздѣлить на то же или на другое число;* 3) *можно оба члена перваго отношенія помножить или раздѣлить на какое-нибудь число и оба члена второго отношенія помножить или раздѣлить на то же или на другое число.*

Дѣйствительно, умножая или дѣля оба предыдущихъ или оба послѣдующихъ члена на одно число, цѣлое или дробное, мы измѣняемъ одинакимъ образомъ знаменателя того и другого отношенія, слѣд. полученныя новыя отношенія будутъ имѣть одинакихъ знаменателей (напр. отъ дѣленія обоихъ послѣдующихъ членовъ на $^2/_3$, члены эти увеличатся въ $1^1/_2$ раза, а слѣд. знаменатели обоихъ отношеній уменьшатся въ $1^1/_2$ раза).

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что правильность пропорціи не нарушится и въ томъ случаѣ, если оба предыдущихъ и оба послѣдующихъ члена ея будутъ одновременно умножены или раздѣлены на одно или даже на разныя числа. Если оба члена одного отношенія умножимъ или раздѣлимъ на одно число, а оба члена другого умножимъ или раздѣлимъ на то же или даже на другое число, то знаменатель отношеній не измѣнится, слѣд. пропорція останется правильной.

260. Сокращеніе членовъ пропорціи. Иногда данную пропорцію можно замѣнить другой, выраженной меньшими числами; иначе говоря—иногда *можно сокращать члены пропорціи;* такъ пропорцію 160 : 34=560 : 119 можно сократить, раздѣливши предыдущіе на 40, а послѣдующіе на 17; получимъ 4 : 2=14 : 7; или можно оба члена перваго отношенія раздѣлить на 2, а второго на 7; получимъ 80 : 17=80 : 17.

Точно также проп. 27 : 5=8x : 32 можно сократить, раздѣливъ оба члена второго отношенія на 8; получимъ 27 : 5=x : 4.

Вообще, *можно сокращать каждый предыдущій со своимъ послѣдующимъ*, а также *предыдущій съ предыдущимъ, а послѣдующій съ послѣдующимъ;* иначе говоря — *можно сокращать каждый изъ крайнихъ съ каждымъ изъ среднихъ.*

261. Уничтоженіе дробей въ пропорціи. Если въ пропорціи находятся дроби, то ихъ можно уничтожить; иначе говоря— можно освободить пропорцію отъ дробей, т. е. замѣнять данную

пропорцію другой, которая будетъ состоять только изъ цѣлыхъ чиселъ.

Возьмемъ напр. проп. $10^7/_{15} : 6^{44}/_{45} = 6 : 4$. Обративъ въ неправ. дроби, получимъ $^{157}/_{15} : ^{314}/_{45} = 6 : 4$; приведемъ дроби къ одному знаменателю; получимъ $^{471}/_{45} : ^{314}/_{45} = 6 : 4$; помножимъ оба члена перваго отношенія на общаго знаменателя 45; тогда будетъ $471 : 314 = 6 : 4$; эта проп. уже не содержитъ дробей.

Точно также изъ проп. $18 : 2^7/_{12} = 80 : 11^{13}/_{27}$ получимъ $18 : ^{31}/_{12} = 80 : ^{310}/_{27}$; $18 : ^{279}/_{108} = 80 : ^{1240}/_{108}$; помноживъ оба послѣдующихъ на 108, будемъ имѣть $18 : 279 = 80 : 1240$.

262. Сложныя пропорціи. *Сложною пропорціей наз. такая, которая происходитъ отъ сложенія, вычитанія, умноженія или дѣленія нѣсколькихъ геометрическихъ пропорцій. Складывать и вычитать пропорціи можно тогда, когда у нихъ знаменатели отношенія одинакіе.* Такъ напр. пропорціи

$30 : 15 = 20 : 10$ и $8 : 4 = 6 : 3$ можно и сложить и вычесть, ибо въ той и другой знам. отн. 2. Дѣйствительно, сложивъ, получимъ

$38 : 19 = 26 : 13$; а вычтя, найдемъ $22 : 11 = 14 : 7$. Обѣ эти пропорціи вѣрны.

Напротивъ, еслибы сложили или вычли пропорціи

$10 : 5 = 16 : 8$ и $6 : 2 = 15 : 5$, у которыхъ знамен. разные, то получили бы $16 : 7 = 31 : 13$ и $4 : 3 = 1 : 3$, что невѣрно, потому что

$16.13 = 208$; а $7.31 = 217$; $4.3 > 3.1$; слѣд. такія пропорціи нельзя складывать и вычитать.

Знаменатель отношенія сложной пропорціи, полученной отъ сложенія и вычитанія, остается тотъ же, какой былъ у тѣхъ пропорцій, которыя мы складывали или вычитали. Такъ, изъ проп. $30 : 15 = 20 : 10$ и $8 : 4 = 6 : 3$ получимъ $38 : 19 = 26 : 13$

и $22 : 11 = 14 : 7$ — пропорціи, имѣющія того же знам. отн. 2, какой имѣли и данныя пропорціи.

Перемножать и дѣлить можно всякія пропорціи. Возьмемъ напр. $24 : 4 = 48 : 8$ и $6 : 3 = 8 : 4$. Перемноживъ эти пропорціи, получимъ $144 : 12 = 384 : 32$. Эта пропорція вѣрна, потому что

$144.32 = 4608$ и $12.384 = 4608$.

Знам. отн. первой пропорціи былъ 6, второй 2; знамен. новой пропорціи есть $12 = 6.2$; слѣд. *знамен. отнош. сложной пропорціи, получаемой отъ перемноженія пропорцій, равенъ произведенію знаменателей перемножаемыхъ пропорцій.*

Раздѣливъ первую пропорцію на вторую, получимъ

$4 : ^4/_3 = 6 : 2$ — пропорція вѣрная, потому что $4.2 = 8$ и $6.^4/_3 = ^{24}/_3 = 8$; знамен. отн. есть $3 = 6 : 2$; поэтому, *знам. отн. сложной пропорціи, получаемой отъ дѣленія, равенъ частному знаменателей отношенія тѣхъ пропорцій, которыя дѣлили.*

263. Чтобы вывести, когда можно складывать и вычитать геом.

проорціи, возьмемъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1}$ и опредѣлимъ условіе, при которомъ возможна пропорція $\frac{a\pm a_1}{b\pm b_1}=\frac{c\pm c_1}{d\pm d_1}$. Взявъ въ этой пропорціи произведенія крайнихъ и среднихъ, получимъ $(a\pm a_1).(d\pm d_1)=(b\pm b_1).(c\pm c_1)$, или $ad\pm a_1d\pm ad_1+a_1d_1=bc\pm$ $\pm b_1c\pm bc_1+b_1c_1$. Но какъ $ad=bc$ и $a_1d_1=b_1c_1$, то $a_1d+ad_1=$ $=b_1c+bc_1$. Опредѣлимъ изъ данныхъ пропорцій d и d_1 и вставимъ величины ихъ въ послѣднее равенство; найдемъ $\frac{a_1bc}{a}+\frac{ab_1c_1}{a_1}=b_1c+$ $+bc_1$, или $a_1^2bc+a^2b_1c_1=aa_1b_1c+aa_1bc_1$, или $a_1^2bc-aa_1bc_1=$ $=aa_1b_1c-a^2b_1c_1$, или $a_1b(a_1c-ac_1)=ab_1(a_1c-ac_1)$, или $(a_1b-ab_1).(a_1c-ac_1)=0$. Но чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо, чтобы одинъ изъ множителей равнялся нулю; слѣд., пропорціи можно складывать и вычитать въ двухъ случаяхъ:

1) когда $a_1b-ab_1=0$, или $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, т. е., *когда пропорціи имѣютъ одного и того же знаменателя отношенія*;

2) когда $a_1c-ac_1=0$, или $\frac{a}{a_1}=\frac{c}{c_1}$, т. е. *когда у пропорцій предыдущіе* члены *пропорціональны* (т. е. изъ нихъ можно составить пропорцію). Напр. пропорціи $8:4=6:3$ и $11:7=^{33}/_4:^{21}/_4$ можно сложить и вычесть, потому что $8:11=6$ $^{33}/_4$; дѣйствительно, сложивъ и вычтя взятыя нами пропорціи, получимъ 19 $11=$ $=^{57}/_4:^{33}/_4$ и $3:3=^9/_4:^9/_4$.

Если имѣемъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1}$, которыхъ знаменатели отнош.$=m$, то $a=bm$, $a_1=b_1m$, откуда $a\pm a_1=m(b\pm b_1)$, и $\frac{a\pm a_1}{b\pm b_1}=m$; слѣд., проп. $\frac{a\pm a_1}{b\pm b_1}=\frac{c\pm c_1}{d\pm d_1}$ имѣемъ того же знам. отн., какъ и данныя пропорціи.

264. Производныя пропорціи. Изъ каждой пропорціи можно составить нѣсколько другихъ, которыя наз. *производными*.

1) Изъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ имѣемъ $\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$, или $\frac{a\pm b}{b}=$ $=\frac{c\pm d}{d}$; т. е. *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему такъ, какъ сумма или разность членовъ второго отношенія къ своему послѣдующему.*

2) Перемѣнивъ мѣста среднихъ въ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, получимъ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; по сейчасъ доказанному правилу имѣемъ $\frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d}$, или, перемѣстивши средніе, $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{c}{d}$; т. е. *сумма или разность преды-*

дущихъ относится къ суммѣ или разности послѣдующихъ такъ, какъ каждый предыдущій къ своему послѣдующему.

Это правило справедливо не только для двухъ, но и для нѣсколькихъ равныхъ отношеній, напр. $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots\ldots=q$.

Изъ этихъ отношеній имѣемъ $a=bq$; $a_1=b_1q$; $a_2=b_2q$.... откуда

$$a+a_1+a_2\ldots\ldots=q\,(b+b_1+b_2+\ldots),\text{ или}$$

$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots}{b+b_1+b_2+\ldots}=q=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\ldots\ldots$$

2) Изъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ по предыдущему имѣемъ $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, или, перемѣстивъ средніе, $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$; но если перемѣстимъ средніе въ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то найдемъ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; слѣд. $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$; т. е. *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ суммѣ или разности членовъ втораго отношенія такъ, какъ предыдущій къ предыдущему или послѣдующій къ послѣдующему.*

265. Возьмемъ проп. $a:b=c:d$ и $ma:b_1=mc:d_1$, въ которыхъ предыдущіе члены пропорціональны (такъ какъ изъ нихъ можно составить проп. $a:ma=c:mc$). Взявъ произведенія крайнихъ и среднихъ, получимъ $ad=bc$ и $mad_1=mb_1c$, откуда $\frac{ad}{mad_1}=\frac{b}{mb_1c}$, или $\frac{d}{d_1}=\frac{b}{b_1}$. Если положимъ $m=1$, то данныя пропорціи примутъ видъ $a:b=c:d$ и $a\ \ b_1=c\ \ d_1$, т. е. будутъ имѣть равные предыдущіе члены. Такимъ образомъ, *если въ двухъ пропорціяхъ предыдущіе пропорціональны* (а также *и равны*), *то послѣдующіе пропорціональны.*

Точно такъ же докажемъ, что *если въ двухъ пропор. послѣдующіе пропорціональны* (или *равны*), *то изъ предыдущихъ можно составить пропорцію.*

266. Рѣшеніе пропорціи. Возьмемъ проп. $8:16=10:x$. Такъ какъ произведеніе крайнихъ должно быть равно произвед. среднихъ, то $8.x=16.10$, а потому $x=\frac{16.10}{8}=20$. Изъ проп. $96:x=24:16$ имѣемъ $24.x=96.16$, откуда $x=\frac{96.16}{24}=64$, и т. под. Поэтому, *чтобы опредѣлить неизвѣстный крайній членъ пропорціи должно средніе перемножить и произведеніе раздѣлить на другой крайній; если же неизвѣстенъ средній членъ, то должно крайніе перемножить и раздѣлить на извѣстный средній.*

Замѣтимъ, что при рѣшеніи геометрической пропорціи, прежде чѣмъ производить умноженіе и дѣленіе, нужно сдѣлать, если можно, сокращеніе. Такъ во второй нашей задачѣ мы имѣли $x=\frac{96.16}{24}$; здѣсь

можно 16 и 24 сократить на 8—получимъ 2 и 3; обыкновенно зачеркиваютъ 16 и 24 и на мѣстѣ ихъ ставить 2 и 3. Еще удобнѣе 96 и 24 сократить на 24—получимъ въ числителѣ 4, а въ знаменателѣ единицу, и $x=4 \,.\, 16=64$. Вотъ примѣры:

1) $x : 4=1{,}58(3) : 2{,}375$; $x=\frac{4.1{,}5833...}{2{,}375}=\frac{4.{}^{19}/_{12}}{{}^{19}/_{8}}=2^{2}/_{3}$.

2) $3 : (0{,}75x+3)={}^{1}/_{81}$ $0{,}037037...$; отсюда имѣемъ

$0{,}75x+3=\frac{3.0{,}037037...}{{}^{1}/_{81}}=\frac{3.{}^{1}/_{27}}{{}^{1}/_{81}}=9$;

слѣд. $0{,}75x=9-3=6$; $x=6 : 0{,}75=600 : 75=8$.

3) Если изъ тройного неизвѣстнаго числа вычтемъ $7^{2}/_{3}$ и остатокъ раздѣлимъ на 4, то частное будетъ во столько разъ больше 3,125, во сколько $3^{29}/_{44}$ меньше 7,3181818... Найти неиз. число.

Означая неиз. число черезъ x, изъ условій задачи получимъ проп. $\frac{3x-7^{2}/_{5}}{4} : 3{,}125=7{,}31818.... : 3^{29}/_{44}$; отсюда

$\frac{3x-7^{2}/_{5}}{4}=\frac{3{,}125.7{,}31818....}{3^{29}/_{44}}$; $3x-7^{2}/_{5}=\frac{4.3{,}125.7{,}31818....}{3^{29}/_{44}}$;

$3x=7^{2}/_{5}+\frac{4.3{,}125.7{,}31818....}{3^{29}/_{44}}$, а потому

$x=\left(7^{2}/_{5}+\frac{4.3{,}125.7{,}31818....}{3^{29}/_{44}}\right)\quad 3.$

Вычисливъ это выраженіе, найдемъ $x=10^{4}/_{5}$.

267. Непрерывная пропорція. *Непрерывною пропорціею наз. такая, у которой средніе или крайніе члены равны* напр.

16 8=8 4 или 9 27=3 9.

Непрерывную пропор. представляютъ еще въ слѣдующемъ видѣ: $\div$ 16 : 8 : 4; $\div$ 27 : 9 : 3. *Повторяющійся членъ непрерывной геометрической пропорціи наз. среднимъ геометрическимъ числомъ двухъ прочихъ членовъ*; такъ 8 будетъ сред. геом. между 16 и 4; а 9—между 27 и 3.

Какъ находить геометрическое среднее двухъ чиселъ, иначе говоря, какъ рѣшать непрерывную геометрическую пропорцію, въ которой средніе или крайніе неизвѣстны, напр. $5 : x=x$ 15, это объясняется въ алгебрѣ.

268. *Среднее ариѳметическое двухъ неравныхъ положительныхъ чиселъ всегда больше средняго геометрическаго между ними.* Возьмемъ числа a и b; сред. ариѳм. ихъ$={}^{1}/_{2}(a+b)$; сред. геометр. опредѣлятся изъ проп. $a : x=x$ b, откуда $x^{2}=ab$; $x=\sqrt{ab}$. Извѣстно, что квадратъ всякаго числа есть величина положительная, слѣд. $(a-b)^{2}>0$, или $a^{2}-2ab+b^{2}>0$. Придавъ къ обѣимъ частямъ этого неравенства по $4ab$, получимъ $a^{2}+2ab+b^{2}>4ab$. Извлекая квадратный корень изъ обѣихъ частей, найдемъ $a+b>2\sqrt{ab}$, или

$^1/_2(a+b) > \sqrt{ab}$. Эти выраженія тогда будутъ равны между собою, когда $a=b$, потому что оба они въ этомъ случаѣ обращаются въ a.

Вотъ еще геометрическое доказательство той же теоремы. Въ овружиост преведемъ произвольный діаметръ и возьмемъ ва немъ какую-нибудь точку, такъ что въ этой точкѣ оаъ раздѣлится на двѣ веравныя части. Арием. среднее этихъ частей будетъ радіусъ; а геометр.—перпендикуляръ, возставлевный изъ этой точки до встрѣчи съ окружностью. Этотъ перпендикуляръ меньше радіуса, и только тогда будетъ равенъ радіусу, когда онъ возставленъ изъ центра, то есть когда отрѣзки діаметра равны.

269. Вопросы. 1) Что ваа. геометрическою проворціей? 2) Какія числа наз. пропорціональными? 3) Въ чемъ состоитъ главное свойство геом. проп.? Доказать это свойство? 4) Какъ можно перематьѣщ члены проп.? 5) Сколько видовъ можетъ имѣть проп.? 6) Какъ совратить члены проп.? 7) Какъ уничтожить дроби въ проп.? 8) Какая нроп. иаз. сложною? 9) Когда можно складывать и вычитать пропорціи? 10) Какія пропордіи можно перемножать и дѣлить почленно? 11) Чему равняется знам. отв. сложной проп., полученной отъ сложенія пропорцій? отъ вычитанія? отъ перемноженія? отъ дѣленія? 12) Какъ опредѣлить неизв. членъ проп.?

ГЛАВА X.

ТРОЙНЫЯ ПРАВИЛА.

270. Простое тройное правило. Возьмемъ зядачу:

Локомотивъ въ 40 минутъ прошелъ 72 версты; сколько верстъ пройдетъ онъ въ 50 минуть, если будетъ итти съ той же скоростью?

Означимъ неизвѣстное число верстъ черезъ x и напишемъ задачу такимъ образомъ: 40 мин.—72 вер.

50 — — x —

Въ этой задачѣ даны три числа 40, 50 и 72; два изъ нихъ, именно 40 и 50, означаютъ минуты, слѣд. однородны между собою; третье число, т. е. 72 версты, однородно съ неизвѣстнымъ, потому что ищется число верстъ; притомъ, чѣмъ больше времени будетъ итти локомотивъ, тѣмъ большее разстояніе онъ пройдетъ; и наоборотъ, чѣмъ большее разстояніе онъ долженъ пройти, тѣмъ большее время нужно употребить для этого; если напр. нужно пройти локомотиву не 72 версты, а вдвое больше, то и времени нужно для этого не 40, а 80 мин.; если онъ будетъ въ дорогѣ не 40, а 120 мин., то н пройдетъ не 72 вер., а втрое болѣе, и т. д. Вообще слѣд. съ увеличеніемъ времени увеличивается во *столько же разъ*, или *пропорціонально*, и разстояніе—и обратно; поэтому, если локомотивъ въ 40 минутъ прошелъ 72 версты, то въ 50 минутъ онъ пройдетъ болѣе 72-хъ во столько разъ. во сколько 50 болѣе 40; слѣд. x во

столько разъ болѣе 72, во сколько 60 болѣе 40, или

$x : 72 = 50 : 40$, откуда $x = \frac{72.50}{40} = 90$ верстъ.

Эту задачу можно рѣшить и безъ помощи пропорцій.

Если въ 40 минутъ локомотивъ прошелъ 72 версты, то въ одну минуту онъ пройдетъ въ 40 разъ меньше, то есть должно 72 раздѣлить на 40 — получимъ $\frac{72}{40}$; а въ 50 мин. онъ пройдетъ въ 50 разъ болѣе, чѣмъ въ одну минуту; слѣд. должно $\frac{72}{40}$ умножить на 50, получимъ $\frac{72.50}{40} = 90$ вер. Этотъ способъ рѣшенія задачи на . *способомъ приведенія къ единицѣ.*

Возьмемъ еще задачу. За 15 аршинъ сукна заплачено 45 рублей; сколько нужно заплатить за 25 арш. того же сукна?

15 арш.—45 руб.
25 — — x —

Въ этой задачѣ даны опять три числа, изъ которыхъ два—15 ар. и 25 ар. однородны между собою, а третье — 45 руб. однородно съ неиз.; притомъ — чѣмъ больше будетъ куплено аршинъ сукна, тѣмъ больше денегъ придется за него заплатить; слѣд. x во столько разъ больше 45-ти рублей, во сколько 25 больше 15,

или $x : 45 = 25$ 15, откуда $x = 75$ руб.

271. Въ первой нашей задачѣ, съ увеличеніемъ времени, увеличивалось во столько же разъ, или *пропорціонально*, и проходимое пространство; во второй задачѣ—съ увеличеніемъ числа аршинъ сукна увеличивалась и стоимость ихъ; такого рода пропорціональность наз. *прямою*; мы говоримъ: *пространство прямо пропорціонально времени*; *стоимость прямо пропорціональна количеству покупаемыхъ вещей.* Но есть много задачъ, въ которыхъ данныя величины находятся въ такой зависимости между собой, что *съ увеличеніемъ одной* другая во столько же разъ *уменьшается*; такая пропорціональность наз. *обратною.* Напр. чѣмъ *больше* употреблено будетъ рабочихъ для какого-нибудь дѣла, тѣмъ въ *меньшее* время (или тѣмъ скорѣе) это дѣло будетъ окончено; чѣмъ *шире* матерія, тѣмъ *меньше* ея пойдетъ на платье; поэтому время, употребленное для исполненія какой-нибудь работы, *обратно* пропорціонально числу работниковъ; число аршинъ, нужное для платья, *обратно* пропорціонально ширинѣ матеріи. Равнымъ образомъ, чѣмъ больше людей, тѣмъ больше хлѣба нужно, чтобы прокормить ихъ—это прямая пропорціональность; чѣмъ *дороже* хлѣбъ, или чѣмъ *больше* его *цѣна*, тѣмъ *меньшее количество* его можно купить на какую-нибудь опредѣленную сумму денегъ — это пропорціональность обратная; чѣмъ больше часовъ въ день работаетъ работникъ, тѣмъ въ меньшее число

дней онъ кончитъ свою работу—это также обратная пропорціональность, и т. под.

Возьмемъ задачу, гдѣ числа были бы обратно пропорціональны: 18 работниковъ кончили работу въ 15 дней: во сколько дней кончатъ такую же работу 30 работниковъ?

18 раб.—15 дн.
30 — — x —

Если 18 работниковъ оканчиваютъ работу въ 15 дн., то 30 работниковъ окончатъ ее скорѣе, то есть проработаютъ меньше 15 дней, во сколько 18 меньше 30; слѣд.

$x:15=18:30$, откуда $x=\frac{15.18}{30}$; или, сократнвъ числителя и знаменателя на 15, получимъ $x=\frac{1.18}{2}=9$.

Рѣшимъ ту же задачу приведеніемъ къ единицѣ: 18 работниковъ кончаютъ работу въ 15 дней; одинъ работникъ проработалъ бы въ 18 разъ дольше, то есть кончитъ бы работу въ 15.18 дней; 30 работн. кончатъ ее въ 30 разъ скорѣе, чѣмъ одинъ работникъ; поэтому должно 15.18 раздѣлить на 30; получимъ 9 дней.

Рѣшеніе располагается обыкновенно слѣдующимъ образомъ:

18 раб.—15 дней
1 — —15.18 дн.
30 — — $\frac{15.18}{30}=9$ дн.

272. Во всѣхъ трехъ задачахъ, которыя мы сейчасъ рѣшили, требовалось пріискать въ тремъ даннымъ числамъ четвертое, имъ пропорціональное; такія задачи относятся къ *простому тройному правилу*, слѣд. *простое тройное правило есть способъ находить къ тремъ даннымъ числамъ четвертое пропорціональное.*

Задачи на тройное правило можно рѣшать: 1) *посредствомъ пропорцій* и 2) *способомъ приведенія къ единицѣ.*

Разсматривая способъ рѣшенія предыдущихъ задачъ, можно вывести слѣдующее правило для составленія пропорціи изъ всякой задачи на тройное правило.

Написавши задачу, какъ показано выше, нужно написать отношеніе, котораго первымъ членомъ долженъ быть x, а вторымъ число, съ нимъ однородное (т. е. число, которое написано надъ x); потомъ, чтобы составить второе отношеніе, нужно смотрѣть, будетъ ли x больше или меньше однороднаго съ нимъ числа; если x больше, то во второмъ отношеніи надобно прежде написать большее число — и наоборотъ. Такъ въ первой задачѣ мы написали сперва x, потомъ 72—число, однородное съ x; далѣе — такъ какъ x долженъ быть больше 72-хъ, то во второмъ отношеніи поста-

вили 50 : 40; въ третьей задачѣ, такъ какъ x меньше 15, то во второмъ отношеніи мы поставили 18 : 30.

Соображая объясненное сейчасъ правило, видимъ, что при составленіи пропорціи изъ задачи все дѣло заключается въ томъ, чтобы вѣрно написать второе отношеніе, такъ какъ въ первомъ отношеніи написать x, потомъ число съ нимъ однородное, дѣло весьма нетрудное; чтобы не сбиваться, нужно всегда, при писаніи пропорціи, не выговаривать ее такъ: x относится къ 72 такъ, какъ 50 къ 40, а читать такимъ образомъ: x больше 72-хъ, во сколько 50 больше 40. Читая пропорцію такъ, какъ сейчасъ сказано, не ошибешься и не напишешь $x : 72 = 40 : 50$, потому что это было бы x *болѣе* 72, во сколько 40 *менѣе* 50; эта пропорція невѣрна, такъ какъ здѣсь большее относится къ меньшему такъ, какъ меньшее къ большему, чего быть не можетъ, потому что въ пропорціи произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ должны быть равны между собою; а большее, умноженное на большее, не можетъ равняться меньшему, умноженному на меньшее.

Возьмемъ еще задачу: 640 человѣкъ вырыли каналъ въ 18 дней; сколько нужно челов., чтобы вырыть такой же капалъ въ 24 дня?

640 чел.—18 дн.
x — — 24 —

Для рѣшенія задачи пишемъ x и число, надъ нимъ стоящее, т. е. $x : 640$; потомъ смотримъ, долженъ ли быть x больше или меньше 640; если времени больше ($24 > 18$), то, чтобы сдѣлать ту же работу, нужно меньше людей; слѣд. x меньше 640, во сколько 18 меньше 24; или $x : 640 = 18 : 24$, откуда $x = 480$.

Чтобы рѣшить ту же задачу безъ пропорцій, нужно *приводить ее къ той единицѣ, гдѣ нѣтъ* x, то есть къ единицѣ дней; именно: чтобы кончить работу въ 18 дней, нужно 640 человѣкъ; чтобы кончить ее въ одинъ день, нужно въ 18 разъ больше народу, т. е. 640.18; чтобы кончить ее въ 24 дня, нужно въ 24 раза меньше людей; слѣд. $x = \frac{640.18}{24} = 480$ человѣкъ.

18 дн.—640 человѣкъ
1 — — 640.18 »
24 — — $\frac{640.18}{24}$ челов.

273. Если въ задачѣ будутъ даны составныя именованныя числа, то ихъ должно обратить въ мѣры одного названія и потомъ уже составлять пропорцію или приводить къ единицѣ. Напр.

Пароходъ въ 3 часа 40 мин. 20 сек. прошелъ 79 верстъ 160 саженъ; сколько пройдетъ онъ въ 11 час. 1 мин. (двигаясь съ той же скоростью)?

Обративъ время въ часы, а пространство въ версты, найдемъ

3 часа 40 мин. 20 сек.$=^{661}/_{180}$ часа; 11 час. 1 мин.$=$
$=11\ ^{1}/_{60}=^{1983}/_{180}$ часа; 79 вер. 160 саж.$=79,32$ вер.

слѣд. въ $^{661}/_{180}$ часа—79,32 вер.

$^{1983}/_{180}$: — — x;

поэтому x: $79,32=^{1983}/_{180} : ^{661}/_{180}=1983 : 661$, откуда

$$x=\frac{79,32.1983}{661}=79,32.3=237,96 \text{ верстъ.}$$

Рѣшимъ эту задачу безъ пропорцій, обративъ время въ секунды, а пространство въ сажени; 3 часа 40 мин. 20 сек.$=13220$ сек. 11 час. 1 мин.$=39660$ сек.: 79 вер. 160 саж.$=39660$ сяж.

Въ 13220 сек. пароходъ прошелъ 39660 сяж.,

въ 1 — — — $\frac{39660}{13220}$ саж.

въ 39660 — — — $\frac{39660.39660}{13220}=39660.3$ саж $=$
$=237,96$ вер.

274. Сложное тройное правило. Если дапа такая задача, что для рѣшенія ея нужно составить нѣсколько пропорцій, то эта задача относится къ *сложному тройному правилу*. Напр.

20 ткачей, работая каждый день по 8 часовъ, выткали въ продолженіе 15 дней 360 аршинъ полотна въ 2 арш. ширины. Спрашивается: во сколько дней 12 ткачей, работая по 10 часовъ въ день, могутъ выткать 540 арш. полотна, шириной въ 3 арш.?

Означимъ неизвѣстное число дней черезъ x и расположимъ задачу такъ, чтобъ однородныя числа стояли одно подъ другимъ:

20 ткач. — 8 час. — 15 дн. — 360 арш. — 2 арш. шир.
12 — — 10 — — x — — 540 — — 3 — —

Чтобы рѣшить эту задачу, приведемъ ее къ нѣсколькимъ задачамъ на простое тройное правило; для этого примемъ нѣкоторыя условія одинаковыми; положимъ напр., что число часовъ въ первомъ и во второмъ случаѣ будетъ 8, а число аршинъ 360, и ширина одинаковая; тогда задача нзмѣнится такимъ образомъ: 20 ткачей, работая каждый день по 8 часовъ, выткали въ продолжепіе 15 дней 360 ар. полотна, шириною въ 2 ар.; во сколько дней 12 ткачей, работая по стольку же часовъ, какъ и первые, вытнутъ столько же арш. полотна? Другими словами: 20 ткачей кончаютъ нѣкоторую работу въ 15 дней, во сколько дней кончатъ ее 12 ткачей?

20 тк.—15 дн.
12 — — y —

Мы означили здѣсь неизвѣстное черезъ y, а не черезъ x, потому что мы перемѣнили условія задачи, взявши 8 часовъ вмѣсто 10 час., 360 арш. вмѣсто 540 арш., 2 арш. шир. вмѣсто трехъ арш.; слѣд. величина неизвѣстнаго также измѣнится. Такъ какъ 12 ткачей про-

работаютъ долѣе, чѣмъ 20, то слѣд. y болѣе 15, во сколько 20 болѣе 12, или $y \quad 15 = 20 \quad 12$.

Теперь введемъ еще одно условіе задачи и будемъ разсуждать такъ: въ y дней ткачи кончаютъ работу, занимаясь по 8 часовъ въ день; во сколько дней они кончатъ ее, работая по 10 часовъ въ день? Назвавъ неизвѣстное черезъ z, получимъ

y дней — 8 час.
z — — 10 —

Если ткачи будутъ работать каждый день больше, то кончатъ работу скорѣе, т. е. въ меньшее число дней; слѣд. z меньше y, во сколько 8 меньше 10; т. е. $z \quad y = 8 : 10$.

Потомъ введемъ еще условіе, именно число аршинъ; разсуждаемъ такъ: въ z дней выткано 360 ар.; во сколько дней будетъ выткано 540 арш.? Назвавъ неизв. черезъ t, получимъ

z дн. — 360 ар.
t — — 540 —

Чтобы выткать 540 арш., нужно времени больше, чѣмъ для того, чтобы сдѣлать 360 арш.; поэтому t болѣе z, во сколько 540 болѣе 360, или $t \quad z = 540 : 360$.

Введемъ наконецъ послѣднее условіе—различную ширину полотна; получимъ задачу: въ t дней выткано нѣсколько аршинъ полотна въ 2 арш. ширины; во сколько дней будетъ выткано столько же арш. полотна, но въ 3 арш. ширины?

Означая теперь неизвѣстное черезъ x, такъ какъ оно удовлетворяетъ уже всѣмъ условіямъ задачи, будемъ имѣть:

t дней — 2 ар. шир.
x — — 3 — —

Если полотно будетъ шире, то, чтобы выткать то же число аршинъ, нужно времени больше; слѣд. x больше t, во сколько 3 больше 2, или $x : t = 3 : 2$.

Такимъ образомъ мы получили слѣдующія пропорціи:

$$y \quad 15 = 20 \quad 12$$
$$z \quad y = 8 \quad 10$$
$$t \quad z = 540 \quad 360$$
$$x \quad t = 3 \quad 2$$

Перемножимъ эти пропорціи; получимъ

$$y.z.t.x \quad 15.y.z.t = 20.8.540.3 : 12.10.360.2;$$

сокративъ первое отношеніе на $y.z.t$, получимъ

$$x : 15 = 20.8.540.3 : 12.10.360.2;$$

$$\text{откуда } x = \frac{15.20.8.540.3}{12.10.360.2} = 45 \text{ дней.}$$

Вмѣсто того, чтобы перемножать предыдущія пропорціи, можно опредѣлить изъ первой проп. y, подставить полученное число вмѣсто y во 2-ю проп. и опредѣлить изъ нея z; затѣмъ величину z подста

вить въ 3-ю проп. и опредѣлить изъ нея t; наконецъ, подставивъ величину t въ 4-ю проп.; можно будетъ опредѣлить и x.

Дѣйствительно, изъ первой проп., найдемъ $y=25$; подставивъ это число во 2-ю пропорцію, получимъ $z : 25=8 : 10$, откуда $z=20$; изъ 3-й проп. найдемъ $t=30$, и наконецъ изъ послѣдней $x=45$.

Видимъ, что, перемножая пропорціи, получаемъ результатъ скорѣе.

Рѣшеніе задачи нужно располагать такимъ образомъ:

20 тк. — 8 час. — 15 дн. — 360 ар. — 2 ар. шир.
15 — — 10 — — x — — 340 — — 3 — —

20 тк.—15 дн. 12 — — y —	$y : 15=20 \quad 12$
y дн.— 8 час. z — —10 —	$z : y = 8 : 10$
z дн.— 360 арш. t — — 540 —	$t : z=540 : 360.$
t дн.— 2 ар. шир. x — — 3 — —	$x : t = 3 \quad 2$

275. Рѣшимъ ту же задачу безъ помощи пропорцій.

20 тк. — 8 ч. — 15 дн. — 360 ар. — 2 ар. шир.
12 — — 10— — x — — 540 — — 3 — —

Будемъ разсуждать такъ: 20 ткачей кончили работу въ 15 дн. 1 ткачъ проработалъ бы въ 20 разъ дольше, т. е. должно 15 умножить на 20; 12 ткачей проработали бы въ 12 разъ менѣе времени, т. е. должно 15.20 раздѣлить на 12 — получимъ $\frac{15.20}{12.}$ Во столько дней кончится работа, если ткачи работаютъ по 8 час. въ день; если же они будутъ работать по 1 часу, то проработаютъ въ 8 разъ дольше, то есть $\frac{15.20.8}{12}$ дней; а если будутъ работать по 10 час., то употребитъ времени въ 10 разъ меньше, то есть $\frac{15.20.8}{12.10}$. Во столько дней кончится работа, если нужно выткать 360 ар. полотна; а если бы нужно было выткать только 1 ар., то времени для этого нужно употребить въ 360 разъ меньше, то есть $\frac{15.20.8}{12.10.360}$; а чтобы соткать 540 ар., нужно времени въ 540 разъ больше, то есть $\frac{15.20.8.540}{12.10.360}$ дней. Во столько дней будетъ выткано полотно въ 2 ар. шир.; если же оно будетъ шир. въ 1 ар., то нужно времени въ 2 раза меньше, то есть $\frac{15.20.8.540}{12.10.360.2}$; а если въ 3 арш. шир., то времени потребуется въ 3 раза больше, то есть $\frac{15.20.8.540.3}{12.10.360.2}$дней. Итакъ $x=\frac{15.20.8.540.3}{12.10.360.2}=45$ дн.

Рѣшать задачи способомъ приведенія къ единицѣ удобнѣе, чѣмъ посредствомъ пропорцій, ибо результатъ получается скорѣе.

276. Есть еще сокращенный способъ рѣшенія задачъ сложнаго тройного правила. Напишемъ нашу задачу по прежнему:

20 тк. —	8 час. —	15 дн. —	360 арш. —	2 арш. шир.
12 —	— 10 —	— x —	— 540 —	— 3 — —

Сообразимъ теперь, какія условія задачи будутъ въ *прямомъ* и какія въ *обратномъ отношеніи* съ неизвѣстнымъ; число ткачей будетъ въ обрат. отнош., потому что, чѣмъ больше ткачей, тѣмъ меньше времени они проработаютъ — и обратно; число часовъ также въ обратномъ, потому что, чѣмъ больше часовъ въ день ткачи будутъ работать, тѣмъ меньшее число дней употребятъ на окончаніе работы; число аршинъ длины и ширины будетъ въ прямомъ отнош., такъ какъ, чѣмъ больше полотна и чѣмъ оно шире, тѣмъ больше нужно времени, чтобъ его сдѣлать. Напишемъ теперь надъ каждымъ условіемъ, въ какомъ отношеніи оно находится къ неизвѣстному:

обр.	обр.		прям.	прям.
20 тк. —	8 час. —	15 дн. —	360 ар. —	2 ар. шир.
12 —	— 10 —	— x —	— 540 —	— 3 — —

Теперь пишемъ x, послѣ него ставимъ знакъ = и проводимъ горизонтальную черту; надъ чертой пишемъ число 15, стояще надъ x; затѣмъ остальныя числа задачи пишемъ множителями въ числителя и знаменателя, и если отношеніе обратное, то пишемъ ихъ такъ, какъ они стоятъ въ самой задачѣ, то есть 20 надъ чертой, или въ числителѣ, а 12 подъ чертой, или въ знаменателѣ; точно также 8 и 10; а если отношеніе прямое, то пишемъ ихъ наоборотъ, то есть 360 и 2 подъ чертой, а 540 и 3 надъ чертой; получимъ

$$x=\frac{15.20.8.540.3}{12.10.360.2}.$$

277. Возьмемъ еще задачу: 280 человѣкъ, работая ежедневно по 12 часовъ, вырыли въ 75 дней каналъ въ 500 саженъ длины, 5 саж. ширины и 4 арш. глубины. Сколько нужно человѣкъ, чтобы они въ 80 дней, работая въ день по 14 часовъ, вырыли каналъ въ 800 саж. длины, 7 саж. ширины и 3 арш. глубины?

280 раб. —	75 дн. —	12 час. —	500 с. дл. —	5 с. шир. —	4 арш. гл.
x —	— 80 —	— 14 —	— 800 —	— — 7 —	— — 3 — —

1) Рѣшеніе посредствомъ пропорцій:

280 раб. — 75 дн. y — — 80 —	y 280 = 75 : 80
y — — 12 час. к — — 14 —	в : y = 12 : 14
я раб. — 500 с. д. t — — 800 — —	t в = 800 : 500
t раб. — 5 с. шир. *и* — — 7 — —	*и* : t = 7 : 5
и — — 4 ар. гл. x — — 3 — —	x : *и* = 3 : 4

$y.в.t.u.x : 280.y.в.t.u = 75 . 12 . 800 . 7 . 3 : 80 . 14 . 500 . 5 . 4$,
или $x : 280 = 75 . 12 . 800 . 7 . 3 \quad 80 . 14 \quad 500 . 5 . 4$, откуда

$$x = \frac{280.75.12.800.7.3}{80.14.500.5.4} = 378 \text{ работниковъ.}$$

2) Рѣшеніе по способу приведенія въ единицѣ.

Чтобы кончить работу въ 75 дней, нужно 280 работн.; чтобы кончить ее въ 1 день, нужно 280.75; а чтобы кончить въ 80 дней, нужно рабочихъ въ 80 разъ меньше, то есть $\frac{280.75}{80}$. Столько нужно рабочихъ, если они будутъ работать по 12 час. въ день; а если они будутъ работать по 1 часу, то, чтобы кончить работу, нужно ихъ въ 12 разъ больше, т. е. $\frac{280.75.12}{80}$; а если по 14 час. въ день, то въ 14 разъ меньше, или $\frac{280.75.12}{80.14}$. Столько нужно рабочихъ, чтобы вырыть каналъ длиною въ 500 саж.; а если бы каналъ имѣлъ въ длину 1 саж., то нужно было бы рабочихъ въ 500 разъ меньше, т. е. $\frac{280.75.12}{80.14.500}$; если же длина канала будетъ 800 саж., то рабочихъ нужно въ 800 разъ больше, или $\frac{280.75.12.800}{80.14.500}$. Столько нужно рабочихъ, чтобы вырыть каналъ въ 5 саж. ширины; если же онъ будетъ въ 1 сажень ширины, то ихъ нужно $\frac{280.75.12.800}{80.14.500.5}$; а если въ 7 саж., то $\frac{280.75.12.800.7}{80.14.500.5}$. Наконецъ если каналъ будетъ не въ 4, а въ 1 арш. глубины, то рабочихъ нужно $\frac{280.75.12.800.7}{80.14.500.5.4}$; а если въ 3 арш., то работниковъ нужно $\frac{280.75.12.800.7.3}{80.14.500.5.4} = 378$.

3) Рѣшеніе по сокращенному способу:

	обр.	обр.	прям.	прям.	прям.
280 раб. —	75 дн. —	12 час. —	500 саж. —	5 с. шир. —	4 арш. глуб.
x —	80 —	14 —	800 —	7 —	3 —

Поэтому $x = \frac{280.75.12.800.7.3}{80.14.500.5.4}$

278. Правило процентовъ. Если кто-нибудь занимаетъ деньги, то онъ платитъ за это лицу, которое дало эти деньги, опредѣленное количество рублей со 100; эта плата и показываетъ количество или таксу *процент*овъ (pro centum — за сто); напр., если я занялъ 300 руб. по 6 процентовъ, то черезъ годъ я долженъ вмѣсто каждыхъ 100 руб. заплатить 106 руб., т. е. долженъ отдать 318 руб.; занявъ 5000 руб. по 8 процентовъ, надо черезъ годъ отдать 5400 руб., и т. под. Тотъ, кто занимаетъ, наз. *должникомъ*, а

нто даетъ взаймы — *кредиторомъ* или *заимодавцемъ*; деньги, отданныя взаймы, составляютъ *капиталъ*; то, что кредиторъ долженъ получить еще сверхъ капитала, наз. *интересами* или *процентными деньгами*; такъ, интересы въ годъ съ 300 р. по 6 процентовъ составитъ 18 руб.; слово проиентъ означается %. Замѣтимъ, что слово процентъ употребляется не только при денежныхъ разсчетахъ, но и вообще для выраженія *прибыли* или *убыли на каждую сотню какихъ-нибудь предметовъ*; напр., если мы скажемъ, что народонаселеніе какого-нибудь города возрасло въ теченіе года на 3%, то это значитъ, что на каждую сотню въ годъ прибавилось по 3 человѣка, и стало быть если въ городѣ было наприм. 20000 жителей, то черезъ годъ ихъ стало 20600.

Изъ предыдущего слѣдуетъ, что *одинъ процентъ съ какого-нибудь числа есть сотая часть этого числа*; слѣд. 2%, 3%, 5%... съ какого-нибудь числа будутъ двѣ, три, 5... сотыхъ долей этого числа. Такъ 3% съ 20000 человѣкъ будутъ $^3/_{100}$ доли 20000, т. е. 20000.0,03=600 человѣкъ.

Проценты бываютъ *простые* и *сложные*. Чтобы показать различіе между ними, возьмемъ примѣръ. Если я занялъ 200 руб. по 6% на 3 года, тогда въ концѣ перваго года я долженъ уплатить 12 руб. процентныхъ денегъ; но положимъ, что я ихъ не заплатилъ; тогда кредиторъ можетъ требовать съ меня черезъ два года или проценты съ 200 руб. за два года, т. е. 24 руб.—ато будутъ *простые* проценты—или же проценты съ 200 руб. за одинъ годъ и проценты съ 212 руб. также за одинъ годъ — тогда будутъ проценты *сложные*. Итакъ, если *проценты считаются только съ капитала, то они будутъ простые*, *если же считаются и проценты на проценты, то получаемъ проценты сложные*. Очевидно, что интересы при сложныхъ процентахъ больше.

279. Простые проценты. Рѣшимъ нѣсколько задачъ.

1) Сколько слѣдуетъ получить въ годъ процентныхъ денегъ съ 2750 руб., считая по 5%?

Искомая прибыль = $^5/_{100}$ отъ 2750 руб. = 2750.0,05=137,5 руб. =137 р. 50 к.

2) Сколько слѣдуетъ получить прибыли въ 5 лѣтъ съ 8340 р., считая въ годъ по 6%?

Въ годъ получится 8340.0,06 р., а въ 5 лѣтъ въ 5 разъ больше.

3) Сколько слѣдуетъ получить прибыли въ 2 года 5 мѣсяцевъ съ 6300 руб., считая по 4%?

Прибыль въ годъ=6300.0,04 руб.; прибыль въ 2 года 5 мѣс., или въ $2^5/_{12}$ года,=6300.0,04.$2^5/_{12}$=6300.0,4.$^{29}/_{12}$= 609 руб.

4) Сколько получится прибыли въ 80 дней съ 5500 р. по 7%? При вычисленіи прибыли за нѣсколько дней, считаютъ мѣсяцъ въ 30

дней, а годъ слѣд. въ 360 дней; поэтому прибыль съ даннаго капитала въ 80 дней, или $^{80}/_{360}={}^{2}/_{9}$ года, будетъ$=4500.0{,}07.{}^{2}/_{9}=70$ руб.

5) Въ одномъ городѣ умерло въ 1880-мъ году 450 человѣкъ, что составило 3% всего, бывшаго при началѣ этого года, населенія города. Сколько было жителей въ началѣ 1880-го года?

Такъ какъ $1\%=450:3=150$, то все населеніе$=150.100=15000$.

6) Сколько рублей положено въ банкъ по $4^{1}/_{2}\%$, если черезъ 5 лѣтъ 9 мѣс. образовался капиталъ въ 3021 руб.?

Въ 5 лѣтъ 9 мѣс., или въ $5^{3}/_{4}$ г., нарастетъ процентовъ $4^{1}/_{2}\,5^{3}/_{4}=$ $={}^{9}/_{2}.{}^{23}/_{4}={}^{207}/_{8}\%$; а весь полученный капиталъ 3021 руб. составитъ $100\%+{}^{207}/_{8}\%={}^{1007}/_{8}\%$; слѣд. $1\%=3021:{}^{1007}/_{8}=\frac{3021.8}{1007}=$ $=24$ руб.; а искомый капиталъ$=100\%=24.100=2400$ р.

7) Въ учебномъ заведеніи 280 человѣкъ; изъ нихъ не перешли въ слѣдующіе классы 32 человѣка; сколько это составляетъ $\%$? Такъ какъ 1% съ 280 равенъ $^{280}/_{100}=2{,}8$, то 32 составитъ столько $\%$ съ 280, сколько разъ 2,8 содержится въ 32; т. е. надо раздѣлить 32 на 2,8; получимъ $32:2{,}8=320:28=80:7=11^{3}/_{7}\%$.

8) Купленъ домъ за 23450 руб., и въ 4 года 9 мѣс. съ него получено чистаго дохода 8911 руб.; сколько $\%$ даетъ домъ?

Прибыль за годъ$=8911:4^{9}/_{12}=1876$ руб.; искомое число процентовъ$=1876:{}^{23450}/_{100}=8\%$.

9) Во сколько времени капиталъ 9600 руб., отданный по $7^{1}/_{2}\%$, даетъ такую же прибыль, какая получается въ 5 мѣсяц. съ 20000 руб. по 6%?

Прибыль съ 20000 руб. по 6% въ 5 мѣс. равна $20000.0{,}06.{}^{5}/_{12}=$ $=500$ руб.; прибыль съ 9600 руб. по $7^{1}/_{2}\%$ въ 1 годъ$=9600.0{,}075$; слѣд. чтобъ узнать, во сколько лѣтъ съ 9600 руб. получится 500 руб. прибыли, надо 500 раздѣлить на $9600.0{,}075$; получимъ $^{25}/_{36}$ года$={}^{25}/_{3}$ мѣс.$=8$ м. 10 дн.

10) Черезъ сколько лѣтъ капиталъ, отданный по 5%, удвоится?

Къ каждому рублю прибавляется въ 1 годъ $^{5}/_{100}={}^{1}/_{20}$ руб.; слѣд. цѣлый рубль прибавится черезъ 20 лѣтъ.

11) Найти сумму двухъ слагаемыхъ, если одно изъ нихъ$=1{,}75$; а другое составляетъ $12^{1}/_{2}\%$ суммы?

Означивъ сумму черезъ x, имѣемъ по условіямъ задачи: $\frac{87^{1}/_{2}}{100}x=1{,}75$; или $0{,}875\,x=1{,}75$; поэтому $x=1{,}75:0{,}875=2$.

12) Торговецъ купилъ на заводѣ 80 пуд. сахару; вровозъ обошелся ему въ 1% затраченныхъ имъ на сахаръ денегъ; всю партію сахару онъ продалъ за 727 р. 20 коп., получивъ при этомъ 20% прибыли. Почемъ за пудъ покупалъ онъ сахаръ?

Въ 727,2 руб. заключается вся сумма, затраченная торговцемъ на покупку и перевозку сахару, и еще 20% съ этой суммы; поэтому 727,2 р. составляетъ 120% суммы, уплаченной за сахаръ и

за его перевозку; одинъ же $^0/_0$ съ этой суммы$=727,2:120=6,06$ р. вся сумма$=6,06 \cdot 100=606$ руб. Въ этомъ количествѣ денегъ заключается сумма, заплаченная за сахаръ, и еще $1^0/_0$ съ этой суммы; слѣд. 606 руб. составляетъ $101^0/_0$ съ суммы, уплаченной за сахаръ; а потому $1^0/_0$ ея$=6$, а вся она$=600$ руб.; слѣд. цѣна 1 пуда сахару$=600:80=7^1/_2$ руб.

13) Нѣкто положилъ въ банкъ 3600 руб., и черезъ 1 годъ 4 мѣс. ему выдали изъ банка капиталъ съ процентами, всего 3864 руб. По скольку процентовъ платилъ банкъ?

Процентныя деньги за 1 г. 4 мѣс. составляютъ $3864-3600=264$ р.; за 1 годъ онѣ равны $264:1^1/_3=198$ р.; а такъ какъ $1^0/_0$ съ 3600 р. есть 36 руб., то 198 руб. составляетъ $198:36=5^1/_2{}^0/_0$.

14) Помѣщикъ продалъ имѣніе по 90 руб. за десятину и $^3/_5$ вырученныхъ денегъ положилъ въ банкъ по $5^0/_0$; черезъ $1^1/_2$ года онъ взялъ своя деньги изъ банка, и ему вмѣстѣ съ процентами выдали 2902 руб. 50 к. Сколько было десятинъ въ имѣніи?

Если въ имѣніи было x десятинъ, то имѣніе продано за $90x$ руб., а въ банкъ положено $^3/_5 . 90x=54x$ руб.; поэтому $54x+0,05.^3/_2.54x=2902,5$ или $54x+4,05x=2902,5$. Отсюда $58,05x=2902,5$; а потому $x=2902,5:58,05=50$.

280. Задачи на процентныя исчисленія можно рѣшать также посредствомъ тройного правила, простого или сложнаго, смотря по условіямъ задача. Вотъ рѣшенія нѣкоторыхъ изъ предыдущихъ задачъ.

Задача 1-я *a*) Рѣшеніе помощью пропорцій:

$$\begin{array}{l|l} 100 \text{ р.} - 5 \text{ р.} & \\ 2750 \text{ »} - x - & x \quad 5=2750 \quad 100 \end{array}$$

b) Приведеніемъ къ единицѣ:

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ р.} & - & 5 \text{ р.} \\ 1 \text{ »} & - & ^5/_{100} \text{ р.} \\ 2750 \text{ »} & - & ^5/_{100} \cdot 2750 \text{ р.} \end{array}$$

Задача 3-я. *a*) Помощью пропорцій:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ р.} - 12 \text{ мѣс.} - 4 \text{ р.} \\ 6300 \text{ »} - 29 \text{ »} - x - \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 100 - 4 & \\ 6300 - y & y:4=6300:100 \\ \hline y - 12 & x:y=29:12 \\ x - 29 & xy:4y=6300.29:100.12 \end{array}$$

$$x=\frac{4.6300.29}{100.12} \text{ руб.}$$

b) Приведеніемъ къ единицѣ:

Со 100 руб. получается 4 руб., съ 1 р.—$^4/_{100}$ р., съ 6300 р.—$^4/_{100} . 6300$. Столько руб. получается въ 12 мѣс.; а въ 1 мѣсяцъ—$\frac{4.6300}{100.12}$; въ 29 мѣс. получится $\frac{4.6300.29}{100.12}$ руб.

Задача 5-я. *a*) Помощью пропорцій.

$$\left.\begin{matrix}100 & — & 3\\ x & — & 450\end{matrix}\right| x : 100 = 450 : 3.$$

b) Безъ пропорцій:

3 человѣка умерло изъ 100; слѣд. 1 умершій приходится на $^{100}/_3$ человѣкъ; а 450 умершихъ $^{100}/_3 . 450$.

Задача 6-я. *a*) Помощью пропорцій:

Узнаемъ сначала, во что обратится черезъ 5 лѣтъ 9 мѣсяцевъ, или черезъ 69 мѣсяцевъ капиталъ въ 100 руб., считая по $4^1/_2$% въ годъ:

въ 12 мѣс. прибавляется 4,5 руб.
69 — — x;

слѣд. $x : 4,5 = 69 : 12$; $x = 25,875$ руб. Итакъ 100 руб. черезъ 69 мѣс. обращаются въ 125,875 руб.; чтобы опредѣлить, какой капиталъ обратится въ теченіе того же времени въ 3021 руб., составляемъ пропорцію:

$$y \quad 100 = 3021 \quad 125,875; \text{ отсюда } y = 2400 \text{ руб.}$$

b) Приведеніемъ къ единицѣ:

Въ 1 годъ къ 100 руб. прибавляется $4^1/_2$ руб.; въ 5 лѣтъ 9 мѣс.$=$ $=5^3/_4$ года прибавится $4^1/_2 . 5^3/_4 = {}^{207}/_8 = 25^7/_8$ руб. Итакъ 100 руб. черезъ 5 л. 9 мѣс. обращаются въ $125^7/_8 = 125,875$ руб. А если капиталъ 125,875 руб. получается изъ 100 руб., то капиталъ въ 1 руб. получится изъ $\frac{100}{125,875}$ руб.; а капиталъ въ 3021 руб. получится изъ $\frac{100.3021}{125,875} = 2400$ руб.

Задача 8-я. *a*) Помощью пропорцій:

23450 р.	— 57 мѣс.	— 8911 р.
100	— 12	— x —

23450 — 8911	
100 — y	$y \quad 8911 = 100 \quad 23450$
y — 57	$x : y = 12 : 57$
x — 12	

$$xy : 8911y — 100 . 12 : 23450 . 57;$$

$$x = \frac{8911 . 100 . 12}{23450 . 57} = 8\%.$$

b) Безъ пропорцій:

Съ 23450 р. получено прибыли 8911 р.; слѣд. прибыль съ 1 руб. будетъ $\frac{8911}{23450}$ р.; а прибыль съ 100 руб. равна $\frac{8911.100}{23450}$ руб.; такая прибыль получена въ 57 мѣс.; прибыль въ 1 мѣс. будетъ въ 57 разъ меньше, т. е. $\frac{8911.100}{23450.57}$; а прибыль въ 12 мѣс. $=$

$$= \frac{8911.100.12}{23450.57} = 8\%.$$

Задача 9-я. *a*) Помощью пропорцій:

Сперва опредѣлимъ, сколько получится прибыли по 6% съ 20000 р. въ 5 мѣс.

100 р. — 12 мѣс. — 6 р.
20000 — — 5 — — *z* —

100 — 6 20000 — *y*	y $6 = 20000 : 100$
y — 12 *z* — 5	z $y = 5 : 12$
	$y.z : 6.y = 20000.5 : 100.12;$

Отсюда $z = 500$ р.

Теперь опредѣлимъ, во сколько времени съ 9600 руб. по $7^1/_2\%$ получится прибыли 500 р.

100 р. — 12 мѣс. — 7,5 р.
9600 — — *x* — — 500 —

100 — 12 9600 — *y*	y $12 = 100$ 9600
y — 7,5 *x* — 500	$x : y = 500 : 7,5$
	$xy : 12y = 100 . 500 : 9600 . 7,5;$
	$x = 8^1/_3$ мѣс.

b) Приведеніемъ къ единицѣ:

Опредѣливъ, что прибыль, которую желаютъ получить съ 9600 руб., равна 500 руб., разсуждаемъ такъ: прибыль 7,5 руб. получается со 100 руб. въ 12 мѣс.; слѣд. 1 руб. прибыли получится со 100 руб. въ $\frac{12}{7,5}$ мѣс.; а прибыль 500 руб. получится съ того же капитала въ $\frac{12.500}{7,5}$ мѣс. Во столько мѣсяцевъ получится прибыль со 100 руб.; а чтобы получить ее съ 1 руб., надо времени въ 100 разъ больше, т. е. $\frac{12.500.100}{7,5}$ мѣс.; получить же ее съ 9600 руб. можно въ 9600 разъ скорѣе, чѣмъ съ 1 руб., т. е. въ $\frac{12.500.100}{7,5.9600}$ мѣс. $= 8^1/_3$ мѣс.

281. Означая *a* капиталъ, *p* — количество процентовъ въ годъ, *b* — прибыль, *t* — время, выраженное въ годахъ, найдемъ, что задачи на простые проценты рѣшаются по формулѣ $b = {}^1/_{100}\, pat$.

282. Сложные проценты. Мы уже говорили, что если по прошествіи каждаго года проценты считаются не только на капиталъ, но и на проценты, то такіе проценты наз. *сложными*. Возьмемъ задачу на сложные проценты.

Во что обратится черезъ 3 года капиталъ 3500 руб., отданный по 5%?

Узнаемъ сперва, во что онъ обратится черезъ 1 годъ.

Такъ какъ капиталъ отданъ по 5%, то къ каждому рублю прибавляется въ годъ $^5/_{100}$ руб., слѣд. черезъ годъ 1 руб. обращается въ 1,05 руб., а 3500 руб. обратятся черезъ годъ въ 1,05.3500=3675 руб. Эти 3675 руб. черезъ годъ обратится въ 1,05.3675=3858 руб. 75 коп. Слѣд. вмѣсто 3500 руб. черезъ 2 года образуется 3858 руб. 75 к.; этотъ капиталъ еще черезъ годъ обратится въ 1,05.3858,75=4051 руб. 68,75 коп. =4051 р. $68^3/_4$ к. Это и будетъ капиталъ, который образуется въ 3 года изъ 3500 руб., отданныхъ на сложные проценты, считая по 5% въ годъ.

Если бы хотѣли опредѣлить, во что обратится данный капиталъ черезъ 4, 5, 6... лѣтъ, то надо бы умножить 4051 руб. 68,75 коп. на 1,05; полученное число опять умножить на 1,05 и т. д.; при этомъ вычисленіе становилось бы все труднѣе, потому что число десятичныхъ знаковъ постоянно бы увеличивалось. Чтобъ упростить вычисленіе, можно ограничиваться только сотыми долями копѣекъ, отбрасывая слѣдующія цыфры (при чемъ если первая изъ отбрасываемыхъ цыфръ больше 5-и, то предыдущую надо увеличивать единицею). Но гораздо удобнѣе рѣшаются такія задачи посредствомъ алгебры.

283. Вотъ общій вопросъ на сложные проценты: во что обратится черезъ t лѣтъ капиталъ a, отданный по p%?

Черезъ 1 годъ 100 руб. обращаются въ $100+p$; слѣд. 1 руб. въ $\frac{100+p}{100}$; a руб. въ $a\left(\frac{100+p}{100}\right)$. Этотъ капиталъ $a\left(\frac{100+p}{100}\right)$ еще черезъ годъ обратится въ $a\left(\frac{100+p}{100}\right).\left(\frac{100+p}{100}\right)=$ $=a\left(\frac{100+p}{100}\right)^2$; черезъ 3 года будетъ $a\left(\frac{100+p}{100}\right)^3$ ......; черезъ t лѣтъ капиталъ $x=a\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$. Въ это уравненіе входятъ 4 количества a, t, p, x, и по треиъ даннымъ можно найти четвертое. Напр. для опредѣленія t логариемируемъ уравн.: $\lg x=\lg a+t.\lg\left(\frac{100+p}{100}\right)$; откуда $t=\frac{\lg x-\lg a}{\lg\left(\frac{100+p}{100}\right)}$; если нужно опредѣлить p, то, раздѣливъ обѣ части уран. $x=a\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$ на a, получимъ $\frac{x}{a}=\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$; отсюда

$\sqrt[t]{\frac{x}{a}}=\frac{100+p}{100}$; слѣд. $100+p=100\sqrt[t]{\frac{x}{a}}$, или

$p=100\left(\sqrt[t]{\frac{x}{a}}-1\right)$.

Если бы хотѣли узнать, черезъ сколько лѣтъ капиталъ удвоится, утроится... вообще увеличится въ n разъ, то должно въ урав.

$x=a\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$ вмѣсто x поставить $2a$, $3a$... na и опредѣлить t;

$$na=a\left(\frac{100+p}{100}\right)^t \text{ или } n=\left(\frac{100+p}{100}\right)^t, \text{ откуда } t=\frac{\lg n}{\lg\left(\frac{100+p}{100}\right)}.$$

Если напр. положимъ въ этомъ выраженіи $p=4$, а $n=2$, то найдемъ по логариѳмическимъ таблицамъ, что капиталъ, отданный по 4%, удвоится черезъ 17 лѣтъ.

284. Правило учета векселей. Если кто-нибудь занимаетъ деньги, то онъ даетъ своему кредитору письменное обязательство въ томъ, что выплатить эти деньги въ назначенный срокъ; такого рода обязательства наз. *распискою*, *заемнымъ письмомъ и векселемъ*. Векселя употребляются обыкновенно людьми, занимающимися торговлею *). *Сумма денегъ, обозначенная въ векселѣ наз. цѣною или валютою векселя*. Валюта векселя представляетъ собою ту сумму, которую должникъ обязанъ уплатить кредитору въ назначенный въ векселѣ срокъ; поэтому, если вексель въ 4180 р. данъ на 9 мѣсяцевъ, то это значитъ, что должникъ занималъ менѣе 4180 руб.; а долженъ отдать черезъ 9 мѣсяцевъ послѣ дачи векселя 4180 руб. Отсюда слѣдуетъ, что кредиторъ имѣетъ право требовать всю вексельную сумму только въ назначенный срокъ; если же должникъ платитъ деньги раньше срока, напр. за два мѣсяца, то изъ цѣны векселя должно вычесть процентныя деньги за два мѣсяца; это наз. *учесть* или *дисконтировать вексель*. Иногда также кредиторъ, нуждаясь въ деньгахъ и не имѣя права требовать уплаты съ должника раньше срока, продаетъ вексель кому-нибудь; въ этомъ случаѣ вексель также дисконтируется. т. е. покупающій удерживаетъ себѣ интересы, слѣдующіе за время, остающееся до срока, а остальную сумму выдаетъ продавцу. Возьмемъ задачу:

---

*) Векселя пишутся по слѣдующей формѣ: Городъ N, число, мѣсяцъ, годъ. Вексель на такую-то сумму. Отъ такого-то числа, мѣсяца, года черезъ столько-то времени по сему моему векселю повиненъ я заплатить такому-то NN или кому онъ прикажетъ, столько-то руб., которые я отъ него получилъ сполна наличными деньгами (или товарами). Подпись занимающаго.

Примѣч. По закону должнику полагается 10 дней льготы послѣ срока (*граціонные* дни).

Учесть вексель въ 483 руб. по 8 годовыхъ процентовъ, уплачиваемый за 7 мѣс. 15 дней до срока?

Опредѣлямъ сперва количество процентовъ за 7 мѣс. 15 дней, или за $7\frac{1}{2}$ мѣс. (мѣсяцы всѣ считаются по 30 дн., а годъ въ 360 дн.); такъ какъ въ годъ считается 8%, то въ 1 мѣс. будетъ $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, а въ $7\frac{1}{2}$ мѣс. придется $\frac{2}{3}\cdot 7\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{2}=5\%$. Поэтому съ каждыхъ 105 руб. надо вычесть 5 руб.; а съ 1 руб. надо вычесть $\frac{5}{105}=\frac{1}{21}$ руб.; съ 482 р. вычесть $\frac{483}{21}=23$ руб. Слѣд., должникъ долженъ отдать не 483 руб., а 23 рублями меньше, т. е. $483-23=460$ руб.

Мы опредѣлили, *учетъ*, т. е. нашли, сколько надо вычесть изъ вексельной суммы, или изъ валюты векселя; но можно вычислить и прямо дисконтированный капиталъ, а именно:

вмѣсто 105 руб. платится 100 руб.
» 1 » » $\frac{100}{105}$
» 483 » » $\frac{100}{105}\cdot 483=460$ руб.

Изложенный нами способъ учета, наз. учетомъ *математическимъ*, не употребляется въ практикѣ; банкиры и купцы употребляютъ учетъ *коммерческій*, именно, мы скидывали 5 руб. со 105 руб., а у нихъ скидываются 5 руб. со 100 руб., такъ что учетъ будетъ больше, а за вексель придется получить меньше:

со 100 руб. вычитается 5 руб.
» 1 » » $\frac{5}{100}$ руб.
» 483 » » $\frac{5}{100}\cdot 483=24$ р. 15 к.

Слѣд., за вексель придется заплатить не 460 руб., какъ мы нашли прежде, а 458 р. 85 к.; разность между обоими рѣшеніями $=$ $=1$ р. 15 к. и составляетъ 5% съ 23 руб., т. е. проценты съ процентовъ.

Обыкновенно употребляется коммерческій учетъ, потому что онъ проще (ибо при вычисленіи его приходится дѣлить на 100).

Вотъ нѣсколько задачъ.

1) По векселю за $1\frac{1}{2}$ года до срока уплачено 2200 руб. съ учетомъ по 8% въ годъ. Опредѣлить валюту векселя?

За $1\frac{1}{2}$ года приходится 12%; слѣд., задача можетъ быть выражена такъ: вмѣсто 100 руб. платится 88 руб.; вмѣсто какого капитала заплачено 2200 руб.?

100 руб.—88 руб.
x ——2200, откуда

x 100=2200 : 88, или $x=2500$ руб.

Другое рѣшеніе: означимъ искомый капиталъ черезъ x; 12% съ него составитъ $0{,}12x$; слѣд. $x-0{,}12x=2200$, или $0{,}88x=2200$; поэтому $x=2200:0{,}88=220000:88=2500$ руб.

2) За вексель въ 18960 руб. по $7^1/_2 \%$ въ годъ уплачено $18367^1/_2$ рублей. За сколько времени до срока произведена уплата?

Учетъ=18960—18367$^0/_0$=592,5 руб.; слѣд.

со 100 руб. учитывается 7,5 руб. въ 12 мѣс.

съ 18960 — — 592,5 — — x —

100 — — 12 м.	y 12=100 : 18960
18960 — — y —	
y м. — — 7,5 руб.	x y=5925 75
x — — — 592,5	

xy : 12y=100,5925 : 18960.75;

x=5 мѣсяцевъ.

Другое рѣшеніе: учетъ за годъ съ 18960 руб. по 7,5$\%$ составляетъ 18960.0,075 руб. = 1442 руб.; между тѣмъ учтено 592,5 руб.; чтобы узнать, за какую часть года сдѣланъ этотъ учетъ, надо 592,5 раздѣлить на 1422, получимъ $\frac{592,5}{1422}=\frac{5925}{14220}=$ $=^0/_{02}$ года (по сокращеніи на общ. наиб. дѣл. 1185)=5 мѣс. Замѣтимъ, что если бы непосредственно раздѣлили 592,5 на 1422; то получили бы 0,41666... года, что, по обращеніи въ простую дробь, даетъ $^5/_{12}$ года.

3) По векселю въ 2400 руб. получено за полгода до срока 2304 рубля; по скольку $\%$ сдѣланъ учетъ?

Учетъ въ $^1/_2$ года=2400—2304=96 руб.; слѣд., учетъ въ годъ= =96.2=192 р.; чтобы узнать, сколько $\%$ отъ 2400 р. составляетъ эта сумма, разсуждаемъ такъ: 1$\%$ отъ 2400 р. равенъ 24 р.; слѣд 192 р. составляютъ столько $\%$, сколько разъ 24 р. содержится въ 192 р., т. е. 192 24=8$\%$.

285. Означая черезъ a валюту векселя, p—число процентовъ въ годъ, t—промежутокъ времени между покупкою векселя и срокомъ его, выраженный въ годахъ, b—уплачиваемую сумму, найдемъ

$$b=a(1-0,01.\ pt).$$

286. Правило учета представляетъ одинъ изъ видовъ задачъ на правило процентовъ. Если требуется опредѣлить сумму, за которую надо продать вексель, то задача математическаго учета представляетъ слѣдующую задачу на проценты: опредѣлить первоначальный капиталъ, который по истеченіи срока векселя обратится въ вексельную сумму; т. е. въ задачѣ даются время, размѣръ $\%$, сумма капитала съ процентными деньгами, а ищется начальный капиталъ. Напр. опредѣлить, за сколько слѣдуетъ продать вексель въ 206 руб. за 6 мѣсяцевъ до срока, съ математическимъ учетомъ по 6$\%$ годовыхъ, значитъ найти, какой капиталъ, будучи отданъ по 6$\%$, обратится черезъ 6 мѣс. въ 206 руб.?

Когда требуется опредѣлить учетъ, то задача математическаго учета приводится къ опредѣленію процентныхъ денегъ по даннымъ: времени, размѣру $\%$ и окончательному капиталу, т. е. капиталу съ процентными деньгами. Напр. опредѣлить учетъ по векселю въ 206 руб. по 6$\%$ за 6 мѣсяц. до срока значитъ найти, сколько процентныхъ денегъ получено въ 6 мѣс. по 6 годовыхъ $\%$, если капиталъ вмѣстѣ съ процентными деньгами составляетъ 206 руб.

Задача коммерческиго учета приводится въ опредѣленію процентныхъ денегъ съ валюты векселя. Напр. найти учетъ но векселю въ 200 руб. за 6 мѣс. до срока по $6^0/_0$ значитъ найти, сколько процентныхъ денегъ получится съ 200 руб. въ 6 мѣс. по 6 годовыхъ $^0/_0$.

Въ математическомъ учетѣ проценты считаются съ суммы, уплачиваемой за вексель; а въ коммерческомъ—съ валюты векселя; матем. учетъ соотвѣтствуетъ уплатѣ процентовъ по окончаніи срока займа; а коммерческій—уплатѣ $^0/_0$ въ моментъ совершенія займа.

Когда въ векселѣ пишется занятая сумма вмѣстѣ съ причитающимися на нее по срокъ платежа процентными деньгами, то такому написанію болѣе соотвѣтствуетъ математическій учетъ. А если въ векселѣ пишется какая-либо сумма, въ заемъ же выдается эта сумма безъ процентныхъ денегъ (въ большинствѣ случаевъ процентныя деньги берутся впередъ), то такому написанію векселя вполнѣ соотвѣтствуетъ коммерческій учетъ.

287. Рѣшимъ еще нѣсколько задачъ, болѣе сложныхъ.

1) Купецъ купилъ товару на 10000 руб. и обязался уплатить $50^0/_0$ этой суммы черезъ 6 мѣсяцевъ, $^0/_0$ суммы черезъ 10 мѣс., а остальныя деньги черезъ годъ. Въ первый срокъ купецъ ничего не уплатилъ; но вато заплатилъ всю суиму раньше другихъ сроковъ, при чемъ не пострадали интересы ни должника, ни кредитора. Опредѣлить время уплаты долга?

Купецъ хотѣдъ уплатить 5000 р. черезъ 6 мѣсяцевъ, 1250 р. черезъ 10 мѣс. и 3750 р. черезъ 12 мѣс. Но 5000 руб. въ 6 мѣс., 1250 руб. въ 10 мѣсяцевъ и 3750 руб. въ 12 мѣс. принесутъ такую же прибыль, какую принесъ бы въ одинъ мѣсяцъ капиталъ въ $5000.6+1250.10+3750.12=87500$ руб.; а чтобы ту же прибыль получить съ капитала 10000 руб., надо, чтобы онъ былъ въ оборотѣ $87500 \quad 10000=8^0/_0$ мѣс. Итакъ, купецъ уплатилъ деньги чрезъ $8^3/_4$ мѣс. послѣ покупки товара.

2) Нѣкто, купивъ товаръ 1-го мая, обязался уплатить тотчасъ же 2700 руб. и 1-го октября того же года 1800 р.; но онъ заплатилъ кредитору капиталъ вмѣстѣ съ $^0/_0$, всего 4522 р. 50 к., перваго августа. Сколько $^0/_0$ получилъ кредиторъ?

Та прибыль, которая получается въ 5 мѣсяцевъ съ 1800 руб., могла бы съ 4500 руб. получиться въ $\frac{5.1800}{4500}=2$ мѣс.; поэтому должнику слѣдовало бы отдать весь долгъ черезъ 2 мѣс., т. е. 1-го іюня; а онъ отдалъ мѣсяцемъ позже и за это далъ лишнихъ 22 руб. 50 коп; эти деньги и составляютъ интересы, причитающіеся съ 4500 руб. въ 1 мѣсяцъ; а слѣд. со 100 руб. въ годъ приходится $\frac{22,5.100.12}{4500}=6$; т. е. кредиторъ получилъ $6^0/_0$.

3) Купецъ долженъ былъ заплатить 5208 руб. черезъ 5 мѣс., 7680 пуб. черезъ 8, а остальныя деньги черезъ 13 мѣс.; а отдалъ, съ согла- кредитора, весь долгъ черезъ 10 мѣс. Какъ великъ былъ долгъ?

Платя весь долгъ черезъ 10 мѣс., купецъ получаетъ прибыль отъ 5208 руб. въ 5 мѣс. и 7680 руб. въ 2 мѣс., или отъ капитала 5208.5+7680.2=41400 руб. въ 1 мѣс.; эта прибыль должна вознаградить убытокъ, который купецъ терпитъ отъ того, что остальныя деньги уплачиваетъ тремя мѣс. раньше; слѣд., остальная часть должна быть такова, чтобы съ нея въ 3 мѣсяца получился такой же доходъ, какой получается съ 41400 р. въ 1 мѣс.; т. е. эта часть $= {}^{41400}/_{3} = 13800$ р.; а весь долгъ $= 13800 + 5208 + 7680 = 26688$ р.

4) Нѣкто, купивъ лѣсъ по 250 р. за десятину, уплатилъ за него только 25% его стоимости, а вмѣсто остальныхъ денегъ далъ вексель въ 25920 руб. на 2 года 6 мѣс. по $7^1/_2$% годовыхъ. Сколько куплено было десятинъ лѣсу?

Опредѣлимъ дѣйствительную цѣну векселя; полагая по $7^1/_2$% въ годъ, получимъ въ 2 года 8 мѣс. 20%; слѣд., надо скинуть 20 руб. съ каждыхъ 120 руб.; получимъ 21600; это составляетъ $^3/_4$ стоимости лѣса; стало быть вся цѣна лѣса$=21600 : {}^3/_4=28800$ руб.; число десятинъ$=28800 : 250=115^1/_5$ дес.

5) Купецъ продалъ 0,4 товара, потомъ 0,2(3), наконецъ $^9/_{50}$ товара; у него осталось еще 84 фунта; при продажѣ онъ выручилъ всего 1712 руб. 88 коп., получивъ 4% прибыли. Сколько у него было фунт. товара и что ему стоилъ фунтъ?

Продано $0,4+0,2333...+{}^9/_{50}={}^2/_5+{}^7/_{30}+{}^9/_{50}={}^{61}/_{75}$ товара; слѣд. осталось $^{14}/_{75}$ товара; всего же было $84 : {}^{14}/_{75}=450$ ф. Чтобы узнать цѣну товара, надо изъ 1712 руб. 88 коп. съ каждыхъ 104 руб. скинуть 4 руб.; найдемъ, что 366 фун. товара стоили 1647 руб., а 1 фун. стоилъ 4 руб. 50 коп.

6) Нѣкто отдалъ $^3/_8$ своего капитала по 6%, а остальную часть по 5% и получаетъ въ годъ 1935 руб. дохода; какъ великъ его капиталъ и по скольку % онъ долженъ отдать его, чтобы увеличить доходъ на 405 руб.?

$^3/_8$ капитала, отданныя по 6%, дадутъ такой же доходъ, какъ цѣлый капиталъ, отданный по $6.{}^3/_8=2^1/_4$%; $^5/_8$ кап. по 5% принесутъ такой же доходъ, какъ цѣлый капиталъ, отданный по $3^1/_8$%; слѣд., надо опредѣлить капиталъ, съ котораго получается въ годъ 1935 руб., считая по $2^1/_4+3^1/_8=5^3/_8$%. Если $5^3/_8$ руб. получаются со 100 руб., то 1 руб. получается съ $100 : 5^3/_8$ руб.$={}^{800}/_{43}$ руб.; а 1935 руб. съ $^{800}/_{43}.\ 1935 = 36000$ руб.; а чтобъ этотъ капиталъ приносилъ доходу $1935+405=2340$ руб., его надо отдать за проценты, во столько разъ большіе $5^3/_8$, во сколько 2340 больше 1935, т. е. по $\frac{43}{8} \cdot \frac{2340}{1935} = 6^1/_2$%.

288. Цѣпное правило. Если требуется перевести мѣры длины, вѣса, денегъ... одного государства на мѣры другого, то такого рода задачи большею частью относятся къ сложному тройному

правилу; но при этомъ рѣшеніе упрощается посредствомъ особаго пріема, наз. *цѣпнымъ правиломъ*. Напр.

Сколько аршинъ въ 458 прусскихъ футахъ, если 226 прус. фут.=219 парижскимъ фут.; 616 пар. фут.=200 метрамъ; 10 метр. =394 дюйм.; 84 дюйм.=3 арш.?

Означимъ искомое число аршинъ черезъ x и напишемъ числа, данныя въ задачѣ, слѣдующимъ образомъ:

x арш.	=	458 прус. фут.
226 пр. ф.	=	219 пар. фут.
616 пар. ф.	=	200 метр.
10 метр.	=	394 дюйм.
84 дюйм.	=	3 арш.

Будемъ разсуждать такъ: если 84 дюйма=3 арш., то 1 дюймъ= $=\frac{3}{84}$ арш.; 394 дюйм.$=\frac{3.394}{84}$ арш., 394 дюйм.$=$10 метр.; слѣд., 10 мет.$=\frac{3.394}{84}$ арш.; 1 мет.$=\frac{3.394}{84.10}$ арш.; 200 мет.$=\frac{3.394.200}{84.10}$ арш.$=$616 пар. фут.; 1 пар. ф.$=\frac{3.394.200}{84.10.616}$ аршин.; 219 пар. фут.$=\frac{3.394.200.219}{84.10.616}$ ар.=226 пр. фут.; 1 пр. ф.$=\frac{3.194.200.219}{84.10.616.226}$ арш.; 458 пр. ф.$=\frac{3.394.200.219.458}{84.10.616.226}$ арш.

Итакъ $x=\frac{3.394.200.219.458}{84.10.616.226}=202,76....$ арш.

Сравнивая выраженіе x съ вышепоказаннымъ расположеніемъ задачи, видимъ, что числитель есть произведеніе чиселъ, стоящихъ по правую сторону знака равенства; а знаменатель — произведеніе чиселъ, стоящихъ по лѣвую сторону того же знака. Такимъ образомъ для рѣшенія задачъ на цѣпное правило должно сдѣлать слѣдующее расположеніе: означивъ искомое число черезъ x, написать съ правой стороны его число, которое должно быть ему равно по условіямъ задачи; подъ этимъ равенствомъ написать другое такъ, чтобъ оно начиналось тѣмъ наименованіемъ, какимъ кончается первое; третье должно начинаться съ того наименованія, которымъ оканчивается второе, и т. д.; потомъ надо перемножить всѣ числа, стоящія съ правой сторны, а также всѣ числа, стоящія съ лѣвой стороны, и первое произведеніе раздѣлить на второе. Напр.

Сколько франковъ въ 410 австрійскихъ гульденахъ, если 1722 рубля=7000 франковъ, а 50 австр. гульд.=32 р. 49 к.

x фран.	=	410 австр. гульд.
50 авст. гульд.	=	32.49 руб.
1722 руб.	=	7000 франк.

$$x=\frac{410.32,49.7000}{50.1722}=1083 \text{ франк.}$$

289. Правило товарищества. Три купца внесли для общей торговли: первый 12000 руб., второй 8000, третій 10000 руб. и получили прибыли 3600 р. Сколько слѣдуетъ получить каждому изъ этой прибыли?

Тотъ долженъ получить больше прибыли, нто больше внесъ денегъ; слѣд. прибыль каждаго должна быть во столько разъ менѣе общей прибыли, во сколько капиталъ каждаго меньше всего капитала 30000, который получится отъ сложенія $12000+8000+10000$; поэтому, означая прибыль перваго x, второго y, третьяго z, получимъ:

$$x : 3600=12000 \quad 30000=12 \quad 30$$
$$y : 3600=8000 \quad 30000= 8 \quad 30$$
$$z : 3600=10000 \quad 30000= 1 \quad 3,$$ откуда

$$x=\frac{3600.12}{30}=1440 \text{ р.}; \; y=\frac{3600.8}{30}=960 \text{ р.}; \; z=\frac{3600}{3}=1200 \text{ р.}$$

Рѣшимъ ту же задачу приведеніемъ къ единицѣ: если съ 30000 руб. получено 3600 руб. прибыли, то

съ 1 руб. получится $3600/30000=3/25$ руб;
съ 12000 руб. $3/25 . 12000=1440$ р.;
съ 8000 руб. $3/25 . 8000=960$ р.;
съ 10000 » $3/25 . 10000=1200$ р.

Въ задачѣ, рѣшенной нами, требовалось раздѣлить прибыль пропорціонально внесеннымъ капиталамъ; такія *задачи, въ которыхъ требуется данное число раздѣлить на части, пропорціональныя другимъ даннымъ числамъ, относятся къ правилу товарищества, или пропорціональнаго дѣленія.* Для рѣшенія такихъ задачъ нужно сложить числа, пропорціонально которымъ должно раздѣлитв данное число (въ нашемъ примѣрѣ мы сложили $12000+ +8000+10000$), а потомъ надо составить слѣдующія пропорціи: первая искомая часть менѣе всего числа (x 3600) во столько разъ, во сколько первое изъ чиселъ, пропорціонально которымъ дѣлятся данное; менѣе суммы этихъ чиселъ (12000 30000); потомъ—вторая искомая часть относится къ данному числу такъ, какъ второе изъ чиселъ, пропорціонально которымъ дѣлится данное, относится къ ихъ суммѣ, и т. д.

Возьмемъ, напр., задачу: разложить 152 на три части, которыя бы относились между собою какъ 3 5 11?

Такъ какъ $3+5+11=19$, то

$$x : 152=3 : 19; \; y : 152=5 : 19; \; z : 152=11 : 19;$$

откуда $x=24$; $y=40$; $z=88$.

Для повѣрки возьмемъ отношенія 24 къ 40 и 40 къ 88; найдемъ $24 : 40=3 : 5$, а $40 : 88=5 : 11$; притомъ $24+40+88=152$; слѣд. задача рѣшена вѣрно.

Чтобы рѣшить эту же задачу безъ пропорцій, разсуждаемъ такъ: искомыя части должны относиться между собой какъ 3 : 5 11; поэтому, если бы первую часть раздѣляли на 3 равныя доли, то во второй части такихъ долей будетъ содержаться 5, а въ третьей 11; слѣд. все число 152 должно содержать $3+5+11$, или 19 такихъ долей, и чтобы найти одну долю, нужно 152 раздѣлить на 19, получимъ 8; въ первой части содержится 3 такихъ доли, слѣд. она$=$ $=8.3=24$; вторая часть$=8.5=40$; третья$=8.11=88$.

Возьмемъ еще задачу: раздѣлить 138 на 3 части, которыя бы относились какъ $^1/_2 : {}^2/_3 : {}^3/_4$?

Здѣсь, чтобъ упростить рѣшеніе, замѣнимъ сперва отношеніе между дробями отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ; приведя дроби къ одному знаменателю и отбросивъ знаменателей, найдемъ:

$^1/_2 \ {}^2/_3 : {}^3/_4=6 : 8 : 9$. Такъ какъ $6+8+9=23$,

то $x : 138=6 : 23$; $y : 138=8 \ 23$; $z \ 138=9 : 23$, откуда $x=36$; $y=48$; $z=54$.

290. Положимъ вообще, что надо раздѣлить число a на нѣсколько частей, напр. на 4 части, въ отношеніи $m : n : p : q$. Назвавъ эти части x, y, z, t, получимъ $x : y : z : t=m : n : p \ q$, или $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{t}{q}$; отсюда (§ 264) имѣемъ

$$\frac{x+y+z+t}{m+n+p+q}=\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{t}{q}$$

Но $x+y+z=a$; слѣд.

$$\frac{a}{m+n+p+q}=\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{t}{q}$$; отсюда получимъ

$x : a=m : (m+n+p+q)$; $y : a=n : (m+n+p+q)$;
$z : a=p : (m+n+p+q)$; $t : a=q : (m+n+p+q)$,

чѣмъ и доказывается объясненный выше способъ рѣшенія задачъ на правило товарищества.

291. Возьмемъ болѣе сложныя задачи.

1) Три купца, торговавшіе вмѣстѣ, получили прибыли 252 руб.; капиталъ перваго былъ 720 руб. и находился въ торговлѣ 8 мѣсяцевъ; капиталъ второго 600 руб. находился въ оборотѣ 9 мѣсяцевъ, и наконецъ третій внесъ 900 руб. на 10 мѣсяцевъ. Сколько прибыли долженъ получить каждый купецъ?

Здѣсь нужно раздѣлить 252 руб. пропорціонально не только внесеннымъ капиталамъ, но и времени. Приведемъ время въ единицѣ; для этого будемъ разсуждать такъ: первый купецъ внесъ 720 руб. на 8 мѣсяцевъ и получилъ нѣкоторую прибыль; еслибъ онъ захотѣлъ получить ту же прибыль въ 1 мѣс., то долженъ бы былъ внести въ 8 разъ болѣе денегъ, то-есть 720.8, или 5760 руб.; точно также второй купецъ долженъ былъ бы внести $600.9=5400$, а третій 9000 руб. также на 1 мѣс. Теперь время сдѣлалось одинаково, и остается только прибыль 252 руб. раздѣлить на части,

пропорціональныя 5760,5400 и 9000. Сложивъ 5760+5400+9000, получимъ 20160, и такъ какъ съ 20160 руб. получено прибыли 252 руб., то

съ 1 руб. получится $^{252}/_{20160}={}^{1}/_{80}$ руб.; а
съ 5760 — $^{1}/_{80}.5760=72$ руб.;
съ 5400 — $^{1}/_{80}.6400=67^{1}/_{2}$ р.
съ 9000 — $^{1}/_{80}.9000=112^{1}/_{2}$ р.

2) Тремъ артелямъ рабочихъ надо заплатить 349 руб. 20 коп.; первая артель изъ 10 человѣкъ работала 8 дней по 9 час. въ день, вторая изъ 6 челов. работала 12 дней по 8 час. въ день; въ третьей артели было 15 челов., и они работали 3 дня по 10 час. въ день. Сколько нужно выдать каждой артели?

Изъ условій задачи видно, что первая артель работала всего 72 часа, вторая 96 час., третья 30 час.; поэтому 349 руб. 20 коп. нужно раздѣлить пропорціонально числу людей въ каждой артели и числу рабочихъ часовъ. Если бы въ первой артели былъ только одинъ работникъ, а не 10, то онъ могъ бы сдѣлать ту же работу не въ 72 часа, а во время, въ 10 разъ большее, то есть въ 720 час. Точно также, если бы во второй и третьей артеляхъ было по одному работнику, то они окончили бы работу въ 96.6=576 и 30.15=450 час. Такимъ образомъ число всѣхъ рабочихъ часовъ=720+576+ +450=1746, и такъ какъ за всю работу нужно заплатить 349 руб. 20 к., то, чтобы найти, сколько стоитъ каждый рабочій часъ, нужно 349 руб. 20 к. раздѣлить на 1746—получимъ 20 к., а потому первая артель должна получить въ 720 разъ больше 20 к., т. е. 144 рубля; вторая въ 576 разъ больше 20 к., т. е. 115 руб. 20 коп.; а третья 20.450=9000 коп., или 90 р.

3) Для переписки сочиненія наняты 3 писца; платы, получаемыя ими за каждый листъ, находились въ отношеніи 4 : 5 : 6; а количества написанныхъ ими листовъ были въ отн. 5 : 12 : 8. За всю работу выдано 32 руб.; сколько получилъ каждый?

Если бы всѣ писцы написали поровну, то второй получилъ бы $^{5}/_{4}$, а третій $^{6}/_{4}$ того, что получилъ первый. Но второй написалъ $^{12}/_{5}$ того количества листовъ, которое написалъ первый; слѣд. онъ долженъ получить $^{5}/_{4}.{}^{12}/_{5}$, или втрое больше, чѣмъ первый; третій написалъ $^{8}/_{5}$ того, что написано первымъ; слѣд. долженъ получить $^{6}/_{4}.{}^{8}/_{5}={}^{12}/_{5}$ того, что получилъ первый; поэтому доля перваго содержится $1+3+{}^{12}/_{5}={}^{32}/_{5}$ разъ въ общей суммѣ и слѣд.$=32:{}^{32}/_{5}=$ $=5$ руб., второй получилъ 5.3=15 р.; третій $5.{}^{12}/_{5}=12$ р.

Задачу эту можно также рѣшить, раздѣливъ 32 руб. на 3 части, пропорціональныя числамъ 20, 60 и 48, которыя получатся отъ перемноженія почленно данныхъ отношеній 4 : 5 : 6 и 5 : 12 : 8. Дѣйствительно, изъ предыдущего видно, что мы дѣлили 32 на ч

сти въ отношеніи $1 : (^{8}/_{4}\cdot{}^{18}/_{3}):(^{8}/_{4}\cdot{}^{8}/_{8})$, или, что то же, въ отнош. 5; 15 : 12=20 : 60 : 48.

4) Нѣкто передъ смертью раздѣлилъ свой капиталъ, состоявшій изъ банковыхъ пятипроцентныхъ билетовъ и приносившій ему въ годъ 1220 руб. дохода, между 4 своими сыновьями, обратно пропорціонально ихъ возрасту; старшему сыну было 20 лѣтъ, второму 18, третьему 15, младшему 6 лѣтъ. Сколько досталось каждому сыну?

Опредѣлимъ сначала капиталъ, который по 5% даетъ въ годъ 1220 руб.; такъ какъ 5 руб. получается со 100 р., то 1 руб. получится съ 20 руб., а 1220 р.—съ 20.1220=24400 руб.

Означая долю старшего x, второго y, третьяго z, младшего t, будемъ имѣть $t : x=20 : 6$; $z : x=20 : 15$; $y : x=20 : 18$; отсюда $t={}^{10}/_{3}x$; $z={}^{4}/_{3}x$; $y={}^{10}/_{9}x$; поэтому доля x старшего содержится во всемъ капиталѣ $1+{}^{10}/_{9}+{}^{4}/_{3}+{}^{10}/_{3}={}^{61}/_{9}$ разъ, и слѣд. $x=24400 : {}^{61}/_{9}=3600$; $t=12000$; $z=4800$; $y=4000$ р.

5) Нѣкоторая работа была исполнена въ 9 дней тремя мастеровыми, которые работали одинъ послѣ другого; первый получалъ по 75 к. въ день, второй—1 руб., третій—$1^{1}/_{2}$ руб. При расчетѣ всѣ они получили поровну. Сколько дней работалъ каждый?

Третій работалъ меньше всѣхъ, потому что получалъ въ день дороже, а по расчету ему выдали столько же, сколько и прочимъ, второй работалъ въ $1^{1}/_{2}$, а первый въ 2 раза больше, чѣмъ третій; слѣд. чтобъ узнать, сколько дней работалъ третій, надо раздѣлить 9 на $4^{1}/_{2}$; получимъ 2 дня.

6) Найти четыре числа, которыхъ сумма=174, и притомъ первое относится ко второму, какъ 4 : 3, второе къ третьему, какъ 5 : 8, а третье къ четвертому, какъ 6 : 7?

Если первое число раздѣлить на 4 равныя части, то во второмъ такихъ частей будетъ 3; такъ какъ второе число относится къ третьему какъ 5 : 8, то, положивъ, что въ третьемъ числѣ такихъ же частей будетъ x, получимъ $3 : x=5 : 8$, откуда $x={}^{24}/_{5}$; если наконецъ число частей, заключающихся въ четвертомъ числѣ, означимъ черезъ y, то получимъ пропорцію ${}^{24}/_{5} : y=6 : 7$, откуда $y={}^{168}/_{30}={}^{28}/_{5}$. Итакъ, первое число содержитъ 4 такихъ части, какихъ во второмъ находится 3, въ третьемъ ${}^{24}/_{5}$, а въ четвертомъ ${}^{28}/_{5}$; а потому вся сумма 174 содержитъ такихъ частей $4+3+{}^{24}/_{5}+{}^{28}/_{5}={}^{87}/_{5}$, и каждая часть$=174 : {}^{87}/_{5}=10$; слѣд. первое число$=10.4=40$; 2-е$=10.3=30$; 3-е$=10.{}^{24}/_{5}=48$; 4-е$=10.{}^{28}/_{5}=56$.

Задачу эту можно рѣшить еще слѣдующими двумя способами:

1) По условіямъ задачи имѣемъ $x : y=4 : 3$; $y : z=5 : 8$; $z : t=6 : 7$. Опредѣлимъ изъ этихъ пропорцій три неизв. посредствомъ какого-нибудь одного; напр. x, z и t черезъ y—получимъ $x={}^{4}/_{3}y$; $z={}^{8}/_{5}y$; $t={}^{7}/_{6}z={}^{7}/_{6}\cdot{}^{8}/_{5}y={}^{56}/_{30}y={}^{28}/_{15}y$. Отсюда видно, что y, или второе число, содержится въ первомъ ${}^{4}/_{3}$, въ третьемъ ${}^{8}/_{5}$, въ четвертомъ ${}^{28}/_{15}$ разъ; а потому во всей суммѣ 174 оно содержится

$1+\frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{28}{13}=\frac{87}{13}$ разъ; слѣд. $y=174:\frac{87}{13}=30$; $x=30:\frac{4}{3}=40$; $z=30.\frac{8}{5}=48$; $t=30.\frac{28}{15}=56$.

2) Опредѣлимъ изъ пропорцій.

$$x:y=4:3$$
$$y:z=5:8$$
$$z:t=6:7$$

отнош. $x:y:z:t$. Для этого нужно измѣнить видъ вторыхъ отношеній во всѣхъ этихъ пропорціяхъ; именно сдѣлать такъ, чтобы второе отношеніе первой пропорціи оканчивалось такимъ числомъ, какимъ начиналось бы второе отношеніе второй пропорціи; наконецъ, послѣдующій членъ второго отношенія второй пропорціи долженъ равняться предыдущему члену второго отношенія третьей пропорціи. Съ этой цѣлью мы умножимъ члены вторыхъ отношеній: въ первой пропорціи на 5.6, во второй на 3.6 въ третьей на 8.3; тогда получимъ:

$$x:y=4.5.6:3.5.6$$
$$y:z=5.3.6:8.8.6$$
$$z:t=6.8.3:7.8.3.$$

Отсюда найдемъ:

$x:y:z:t=4.5.6:3.5.6:8.3.6:7.8.3$; поэтому для опредѣленія x, y, z, t, надо раздѣлить 174 пропорціонально произведеніямъ 4.5.6, 3.5.6, 8.3.6 и 7.8.3, т. е. въ отношеніи 120 : 90 : 144 : 168=20 : 15 : 24 : 28. Такъ какъ 20+15+24+28=87, а 174 : 87=2, то $x=2.20=40$; $y=2.15=30$; $z=2.24=48$; $t=2.28=56$.

292. Правило смѣшенія. Смѣшано три сорта муки: 23 фун. перваго сорта по 9 коп. за фун., 20 фун. второго по 6 коп. и 13 фун. третьяго по 5 коп. Сколько стоитъ фунтъ смѣси?

Количество смѣси=23+20+13=56 фун.; вся мука перваго сорта стоитъ 9.23=207 коп.; второго — 6.20=120 коп.; третьяго — 5.13=65 коп.; слѣд. всѣ 56 фун. смѣси стоятъ 207+120+65=392 коп., а потому 1 ф. стоитъ 392 : 56=7 к.

Возьмемъ еще примѣръ:

Серебряникъ сплавилъ 3 фунта серебра 72-й пробы съ 4 ф. 84-й пробы. Какой пробы получился сплавъ?

Извѣстно, что пробою наз. число золотниковъ чистаго серебра или золота, находящееся въ одномъ фунтѣ сплава; поэтому

въ 3 фун. 72-й пробы заключается 72.3=216 золот. серебра,
въ 4 фун. 84-й пробы заключается 84.4=336 золот.,
слѣд. въ 7 фун. сплава — 216+336=552 золот.
а въ 1 фунтѣ — — $\frac{552}{7}=78\frac{6}{7}$ золот.; т. е.
сплавъ будетъ $78\frac{6}{7}$ пробы.

Вообще, если m_1, m_2, m_3.... будутъ количества смѣшиваемыхъ веществъ, а p_1, p_2, p_3.... цѣны единицы ихъ вѣса, то цѣна единицы вѣса смѣси $=\frac{p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3+\ldots\ldots}{m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots}$

393. Въ двухъ предыдущихъ задачахъ *были даны количества смѣшиваемыхъ матеріаловъ и цѣны ихъ* или достоинство (какъ

во второй задачѣ), *и требовалось найти цѣнность смѣси*; подобныя задачи составляютъ только одинъ видъ задачъ, относящихся въ правилу смѣшенія. Есть еще другія задачи, въ которыхъ *дается цѣна смѣшиваемыхъ веществъ и требуется найти, по скольку нужно ихъ брать, чтобы получить смѣсь опредѣленнаго вѣса или объема (вообще опредѣленнаго количества) и опредѣленной цѣнности*. Возьмемъ такую задачу.

Ведро вина одного сорта стоитъ 36 руб., а другого 20 руб.; по скольку нужно взять отъ каждаго сорта, чтобы составилось 50 ведеръ смѣси и чтобы ведро стоило 30 руб.?

Если за ведро вина перваго сорта будемъ брать 30 руб., то потерпимъ 6 руб. убытку на ведро, слѣд. на $1/_6$ ведра придется одинъ руб. убытку; а если второй сортъ будемъ продавать по 30 руб., то получимъ 10 руб. барыша на ведро, или 1 руб. барыша на $1/_{10}$ ведра; поэтому, чтобы на всю смѣсь не получить ни убытку, ни прибыли, нужно взять $1/_6$ ведра перваго и $1/_{10}$ ведра второго вина, тогда убытокъ въ рубль уничтожится прибылью въ рубль; при этомъ выйдетъ смѣсь требуемой цѣны, но ея будетъ не 50 ведеръ, а $1/_6+1/_{10}=4/_{15}$ ведра. Такъ какъ для полученія $4/_{15}$ ведра смѣси нужно взять $1/_6$ ведра перваго сорта, то для полученія 50 ведеръ нужно взять болѣе $1/_6$ во столько разъ, во сколько 50 болѣе $1/_{15}$; итакъ, $x : 1/_6=50 : 4/_{15}$, откуда $x=31^1/_4$ ведра; количество вина второго сорта опредѣлимъ также изъ пропорціи $y : 1/_{10}=50 : 4/_{15}$, откуда $y=18^3/_4$. Впрочемъ количество ведеръ 2-го сорта можно опредѣлить проще, вычтя $31^1/_4$ изъ 50.

Вмѣсто пропорцій можно употреблять способъ приведенія въ единицѣ; если для полученія $4/_{15}$ ведра смѣси надо взять $1/_6$ ведра перваго сорта, то для полученія $1/_{15}$ ведра смѣси надо взять перваго сорта вина въ 4 раза меньше, т. е. $1/_{24}$ ведра; для полученія 1 ведра смѣси надо взять въ 15 разъ больше $1/_{24}$, т е. $15/_{24}=5/_8$ ведра; для полученія 50 ведеръ смѣси надо взять $5/_8.50=250/_8=31^1/_4$ ведра вина перваго сорта.

Для повѣрки рѣшенія разсчитаемъ, что стоятъ $31^1/_4$ ведро перваго сорта вина и $18^3/_4$ ведеръ второго, и потомъ опредѣлимъ, что будетъ стоить ведро смѣси; если выйдетъ 30 руб., то задача сдѣлана вѣрно.

Всѣ $31^1/_4$ ведра перваго сорта стоятъ $36.31^1/_4$ руб.$=1125$ руб. а $18^3/_4$ вед. 2-го сорта стоятъ $20.18^3/_4=375$ р.; всѣ 50 вед. стоятъ $1125+375=1500$ р., а одно ведро смѣси стоитъ $1500 : 50=30$ руб.

Понятно, что задачу такого рода, какъ эта, можно рѣшить только тогда, когда требуемая цѣна смѣси будетъ менѣе цѣны одного сорта и болѣе другого; напр., если бы требовалось смѣшать чай въ 3 руб. и 2 руб. 50 коп. за фунтъ такъ, чтобы фунтъ смѣси стоилъ 5 р. или $1^1/_2$ руб., то такая задача была бы нелѣпа, и рѣшить ее невозможно.

294. Предыдущую задачу можно рѣшить еще слѣдующими способами.

1) Если на винѣ перваго сорта мы несемъ 6 руб. убытку на каждое ведро, а на второмъ сортѣ получаемъ 10 руб. на ведро прибыли, то, чтобы прибыль могла покрыть убытокъ, надо взять перваго сорта больше, чѣмъ второго, и во столько разъ больше, во сколько 10 больше 6; поэтому, чтобы узнать, сколько надо взять ведеръ того и другого сорта для составленія 50 вед. смѣси, надо раздѣлить 50 на двѣ части въ отношеніи 10 : 6 или 5 : 3. Такъ какъ $5+3=8$, то дѣлимъ 50 на 8; тогда первая часть будетъ $^{50}/_{8}.5=^{250}/_{8}=31^{1}/_{4}$, а вторая$=^{50}/_{8}.3=^{150}/_{8}=18^{3}/_{4}$. Итакъ, перваго сорта надо взять $31^{1}/_{4}$ вед., а второго $18^{3}/_{4}$ вед.

2) Если мы возьмемъ 10 ведеръ перваго сорта и 6 ведеръ второго, то убытокъ на первомъ сортѣ покроется прибылью на второмъ, ибо убытокъ$=6.10$ руб., а прибыль$=10.6$ руб. При этомъ мы получимъ $10+6=16$ вед. смѣси; для полученія же 50 вед. смѣси надо взять не 10 вед. перваго сорта, а больше 10 во столько разъ, во сколько 50 больше 16. Такимъ образомъ, если количество ведеръ перваго сорта, нужныхъ для составленія всей смѣси, означимъ черезъ x, а количество ведеръ второго сорта—черезъ y, то получимъ пропорціи $x : 10=50 : 16$; $y : 6=50 : 16$.

3) Намъ нужно составить смѣсь цѣнностью въ $30.50=1500$ руб.; а если бы мы взяли явно только перваго сорта, то цѣнность его была бы $36.50=1800$ руб.; поэтому мы понесли бы убытку $1800—1500=300$ руб. Чтобы покрыть этотъ убытокъ, надо нѣкоторое количество вина перваго сорта замѣнить вторымъ. Замѣняя одно ведро вина перваго сорта однимъ ведромъ второго, мы уменьшаемъ убытокъ на $36—20=16$ руб.; поэтому, чтобы совершенно уничтожить убытокъ, т. е. понизить цѣнность смѣси на 300 руб., надо взять столько ведеръ второго сорта, сколько разъ 16 руб. содержатся въ 300 руб., т. е. $300 : 16=18\,^{3}/_{4}$ ведеръ; а потому перваго сорта надо взять $50—18^{3}/_{4}=31^{1}/_{4}$ вед.

Этотъ способъ рѣшенія можно нѣсколько сократить, именно такъ: убыль на одномъ ведрѣ перваго сорта$=36—30=6$ руб.; слѣд., убыль на всей смѣси, предполагая, что она составлена только изъ перваго сорта, будетъ $6.50=300$ руб.; затѣмъ надо продолжать рѣшеніе такъ, какъ сейчасъ изложено.

295. Послѣдній способъ рѣшенія прилагается во многимъ задачамъ, которыя по своему содержанію не могутъ быть отнесены къ правилу смѣшенія, и рѣшеніе которыхъ по предыдущимъ способамъ было бы неудобно. Такова, напр., слѣдующая задача:

На пароходѣ продано было 57 билетовъ перваго и второго классовъ; билетъ 1-го класса стоитъ $2^{1}/_{2}$ руб., а второго 1 руб. 75 коп. Сколько продано билетовъ перваго класса и сколько второго, если за всѣ билеты получено 123 рубля?

Если бы всѣ 57 билетовъ были перваго класса, то было бы выручено денегъ $2^{1}/_{2}.57=142^{1}/_{2}$ руб. На самомъ же дѣлѣ получено 123 руб., т. е. на 19 руб. 60 коп. меньше, оттого, что въ числѣ 57 билетовъ было нѣсколько билетовъ второго класса. Каждый билетъ второго класса дешевле билета перваго класса на

2 руб. 60 коп.—1 р. 75 к.=75 коп.; слѣд., продажа одного билета 2-го класса вмѣсто билета перваго класса уменьшаетъ выручку на 75 коп.; поэтому, чтобъ уменьшить ее на 19 руб. 50 коп., т. е. чтобы выручка была не $142^1/_2$ руб., а 128 руб., нужно продать столько билетовъ второго класса, сколько разъ 75 коп. содержатся въ 19 руб. 50 коп., т. е. 1950 : 75=26 билетовъ. Число билетовъ перваго класса=57—26=81.

296. Возьмемъ такую задачу, гдѣ требуется сдѣлать смѣшеніе изъ трехъ веществъ.

Смѣшать 3 сорта чаю — въ 2 р. 38 к., 2 р. 10 к. и 1 р. 61 к. за фунтъ, такъ чтобы вышло 9 пуд. 18 ф. чаю цѣной въ 1 р. 82 к. за фунтъ; сколько надо взять каждаго сорта?

Продавая фунтъ смѣси по 1 р. 82 коп., получимъ отъ перваго сорта на каждый фун. убытку 56 к., отъ второго также убытку 28 к., отъ третьяго прибыли 21 коп. Если смѣшаемъ 21 ф. перваго сорта съ 56-ю ф. третьяго, то не получимъ ни прибыли, ни убытку, потому что убытокъ перваго сорта=56.21 коп. покроется прибылью отъ третьяго, равной 21.56 коп. Смѣшаемъ также второй сортъ съ третьимъ, взявъ второго сорта 21 ф., а третьяго 28 фун.; тогда точно также убытокъ, понесенный на чаѣ второго сорта, вознаградится прибылью отъ третьяго. Итакъ, для смѣшенія нужно взять перваго сорта 21 ф., второго также 21 ф., а третьяго 56+28=84 фун. Чтобъ узнать, сколько нужно взять каждаго сорта для составленія 9 пуд. 18 ф.=378 ф. смѣси должно 378 раздѣлить въ отношеніи 21 : 21 : 84, или въ отнош. 1 : 1 : 4.

Такъ какъ 1+1+4=6, а 278 : 6=63, то, слѣд., перваго сорта надо взять 63 ф., второго также 63 ф., а третьяго 63.4=252 ф.

Для повѣрки рѣшенія вычислимъ, что будутъ стоить вещества, изъ которыхъ сдѣлана смѣсь, и во что обойдется 1 ф. смѣси. Такъ какъ 63 ф. перваго сорта стоятъ 238.63=14994 коп., 63 ф. второго сорта стоятъ 210.63=13230 к., 252 ф. третьяго стоятъ 161.252=40572 к., то стоимость всей смѣси=68796 к., а цѣна 1 ф.=68796 : 378=182 к.=1 р. 82 к.; слѣд., задача рѣшена вѣрно.

297. Рѣшимъ ту же задачу другимъ способомъ.

Продавая чай по 1 р. 82 к. за фунтъ, мы получимъ за каждый фунтъ отъ перваго сорта 56 к., а отъ второго 28 коп. убытку; отъ третьяго же сорта 21 к. прибыли; иначе говоря—отъ перваго сорта мы будемъ имѣть 1 коп. убытку на $^1/_{56}$ фун., отъ второго 1 коп. убытку на $^1/_{28}$ ф., отъ третьяго 1 коп. прибыли на $^1/_{21}$ фун.; слѣд., если смѣшаемъ $^1/_{56}$ ф. перваго сорта съ $^1/_{21}$ ф. третьяго, а также $^1/_{28}$ ф. второго сорта съ $^1/_{21}$ ф. третьяго, то не получимъ ни прибыли, ни убытку. Итакъ, для смѣшенія надо взять $^1/_{56}$ ф. перваго сорта, $^1/_{28}$ ф. второго и $^2/_{21}$ ф. третьяго. Чтобъ узнать, сколько надо взять фун. каждаго сорта для составленія 378 ф. смѣси, должно 378 раздѣлить на части въ отношеніи $^1/_{56}$: $^1/_{28}$: $^1/_{21}$=3 : 6 : 16; тогда найдемъ, что отъ перваго сорта надо взять $45^9/_{25}$ ф., отъ второго $90^{18}/_{25}$ ф., отъ третьяго $241^{23}/_{25}$ ф. Такимъ образомъ получили другое рѣшеніе, чѣмъ прежде; повѣривъ это рѣшеніе, увидимъ, что оно вѣрно.

Итакъ, задачи на правило смѣшенія, когда дается три вещества, имѣютъ вообще нѣсколько рѣшеній.

298. Изъ 4 сортовъ кофе — въ 35 к., 40 к., 45 к. и 46 к. за фунтъ сдѣлать смѣсь въ 52 фун. вѣсомъ, а цѣной въ 42 к. за фунтъ?

Отъ 1-го сорта получимъ на фунтъ 7 к. прибыли, отъ 2-го 2 к. прибыли, отъ 3-го 3 к. убытку, отъ 4-го 4 коп. убытку; слѣд., если смѣшать 1-й сортъ съ третьимъ, взявъ отъ перваго 3 ф., а отъ третьяго 7 ф., также второй сортъ съ четвертымъ, взявъ второго 2 ф., а четвертаго 1 ф., то не получимъ ни прибыли, ни убытку, и тогда составится смѣсь требуемой цѣнности въ $3+2+7+1=13$ фун. Раздѣливъ теперь 52 на части въ отношеніи $3:2:7:1$, найдемъ, что надо взять перваго сорта 12 ф., второго 8 ф., третьяго 28 ф., четвертаго 4 ф.

Данные сорта кофе можно смѣшивать различнымъ образомъ, напр. 1-й сортъ съ 4-мъ, а 2-й съ 3-мъ, и т. под., такъ что задача имѣетъ множество рѣшеній.

299. Вотъ удобный способъ для рѣшенія такихъ задачъ, гдѣ дается нѣсколько веществъ для смѣшенія. Возьмемъ задачу:

Смѣшать 6 сортовъ муки — въ 7, 8, 12, 15, 16 и 20 к. фунтъ, чтобы вышло 96 ф. по 14 к. за фунтъ?

Возьмемъ ариомет. среднее цѣнъ ниже 14 к., потомъ цѣнъ выше 14; первое будетъ 9 коп., а второе 17 коп. Смѣшаемъ товаръ по 9 коп. съ товаромъ по 17 коп., такъ чтобы вышло 96 ф. смѣси, цѣной по 14 к. за фунтъ. Для этого надо взять $^1/_3$ ф. высшаго сорта и $^1/_5$ ф. низшаго, остается раздѣлить 96 въ отношеніи $^1/_3:{}^1/_5=5:3$; тогда найдемъ, что высшаго сорта надо взять 60 ф., а низшего 36 фун. Такимъ образомъ, чтобы сдѣлать требуемое количество смѣси и требуемой цѣнности изъ данныхъ шести сортовъ, надо отъ каждаго изъ трехъ сортовъ высшихъ цѣнъ взять по $^{60}/_3$, или по 20 фун., а отъ каждаго изъ остальныхъ сортовъ по $^{36}/_3=12$ фун.

300. Возьмемъ задачу на 2-й родъ правила смѣшенія въ общемъ видѣ. Изъ двухъ веществъ, цѣною по a и a_1 руб., за фунтъ, сдѣлать b фун. смѣси, цѣной въ с руб. фунтъ?

Если отъ перваго взять x, то отъ второго надо взять $b-x$; цѣна перваго$=ax$, а второго$=a_1(b-x)$; цѣна всей смѣси$=$ $=ax+a_1(b-x)$; цѣна одного фунта смѣси$=\frac{ax+a_1(b-x)}{b}$; изъ уравн. $c=\frac{ax+a_1(b-x)}{b}$ найдемъ x, а потомъ $b-x$.

Положимъ еще, что нужно сдѣлать смѣшеніе изъ трехъ веществъ; 1 фун. перваго стоитъ a, второго a_1, третьяго a_2 руб.; по скольку взять каждаго, чтобы получить b фунт. смѣси по с руб. за фунтъ? Если перваго нужно взять x, а второго y фун., то третьяго нужно взять $b-x-y$; разсуждая такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, получимъ уравн. $\frac{ax+a_1y+a_2(b-x-y)}{b}=c$; это уравн. неопредѣленное, слѣд. даетъ безчисленное множество рѣшеній.

Если бы даны были для смѣшенія 4, 5... веществъ, то получили бы одно уравненіе съ треля, четырьмя и т. д. неизвѣстными.

Вотъ частный примѣръ. Имѣемъ трехъ сортовъ кофе—въ 34, 30 и 28 коп. фунтъ. По скольку нужно взять отъ каждаго сорта, чтобы получить 64 фунта смѣси въ 26 коп. фунтъ?

Положивъ, что отъ перваго сорта нужно взять x, отъ второго y, слѣд. отъ третьяго $54-x-y$ фун., получимъ урав.

$34x+30y+28.(64-x-y)=26.54$, или $11x+7y=162$.

Рѣшимъ это урав. въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ:

$$y=\frac{162-11x}{7}=23-x+\frac{1-4x}{7}=23-x+t;\ 1-4x=7t;$$

$$x=-t+\frac{1-3t}{4}=-t+t_1;\ 1-3t=4t_1;\ t=-t_1+\frac{1-t_1}{3}=-t_1+t_2;$$

$1-t_1=3t_2$; $t_1=1-3t_2$; $t=-1+4t_2$; $x=2-7t_2$; $y=20+11t_2$.

Положивъ $x=2-7t_2>0$ и $y=20+11t_2>0$, найдемъ для t_2 слѣдующіе предѣлы: $t_2>-1^9/_{11}$; $t_2<{}^2/_7$; слѣд. $t_2=0,-1$, а потому $x=2$; $y=20$; $z=32$ и $x=9$; $y=9$; $z=36$.

Такимъ образомъ получили два цѣлыхъ положительныхъ рѣшенія.

301. **Вопросы.** 1) Что наз. простымъ тройнымъ правиломъ? 2) Сколькими способами можно рѣшать задачи на тройное правило? 3) Какъ составить пропорцію изъ задачи, относящейся къ прост. тройн. прав.? 4) Какія задачи относятся къ сложному. тройн. правилу? 5) Что наз. процентомъ? 6) Какая разница между простыми и сложными процентами? 7) Что называется векселемъ? 8) Что значитъ учесть вексель? 0) Какъ дѣлается математическій учетъ? коммерческій? 10) Какія задачи относятся къ цѣпному правилу? 11) Какія задачи относятся къ правилу товарищества? 12) Какія задачи относятся къ правилу смѣшенія?

КОНЕЦЪ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

ГЛАВА I. СЧИСЛЕНІЕ.

ГЛАВА II. ДѢЙСТВІЯ СЪ ЦѢЛЫМИ ЧИСЛАМИ.

ГЛАВА III. СОСТАВНЫЯ ИМЕНОВАННЫЯ ЧИСЛА.

ГЛАВА IV. О ДѢЛИТЕЛЯХЪ.

ГЛАВА V. ДРОБИ.

ГЛАВА VI. ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ.

ГЛАВА VII. НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

ГЛАВА VIII. ОТНОШЕНІЯ.

ГЛАВА IX. ПРОПОРЦІИ.

ГЛАВА X. ТРОЙНЫЯ ПРАВИЛА.